

SCHWACHE TOPOLOGIE AUF DEM RAUM DER BEWERTUNGEN

**Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München**

vorgelegt von

Peter Prinz

aus München

eingereicht im Juli 1977



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555625_0020

SCHWACHE TOPOLOGIE AUF DEM RAUM DER BEWERTUNGEN

Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München



vorgelegt von
Peter Prinz
aus München

eingereicht im Juli 1977



Referent: Prof. Dr. H.G. Kellerer

Korreferent: Prof. Dr. D.A. Kappos

Tag der mündlichen Prüfung: 19. 9. 1977

Inhaltsverzeichnis

Einleitung und Inhaltsübersicht	Seite	I
Vorbemerkungen		IX
<u>Teil I</u> Stetigkeit und Fortsetzung von Bewertungen		1
§1. Elementare Eigenschaften		1
1.1. Ausgangssituation		1
1.2. ϕ -Stetigkeit		2
1.3. Additivität		6
1.4. Eindeutigkeit		8
1.5. Regularität		12
§2. Fortsetzung von Bewertungen		15
2.1. Schwache Stetigkeit		15
2.2. Existenz und Eindeutigkeit der Fortsetzung		24
2.3. Folgerungen und Bemerkungen		32
2.4. Beispiele		37
<u>Teil II</u> Ein Funktionenverband über W		50
§3. Zuordnung von "Maß" und "Integral"		50
3.1. Ortsfunktionen		51
3.2. Darstellung von "Integralen" auf meßbaren Ortsfunktionen		53
3.3. Invarianz der schwachen Stetigkeit		58
3.4. Darstellung von "Integralen" auf stetigen Ortsfunktionen		63
3.5. Beispiele		73
<u>Teil III</u> Schwache Topologie		77
§4. Grundlegende Eigenschaften		77
4.1. Definition der Topologie		77
4.2. Stetige Funktionen auf $\mathcal{W}_p^0(V)$		80

4.3. Trennbarkeitseigenschaften	83
4.4. v -randlose Elemente	91
§5. Metrisation	94
§6. Kompaktheit	102
6.1. Gleichgradige Stetigkeit	102
6.2. Relativ kompakte Unterräume	113
6.3. Beispiele	117
Symbolverzeichnis	125
Stichwortverzeichnis	126
Literaturverzeichnis	128

Einleitung und Inhaltsübersicht

Bei zentralen Problemstellungen in der Maß- und Integrations-theorie gibt es weitreichende Analogien zwischen Lösungsmethoden, die einerseits für Maße, andererseits für Integrale angewendet werden. Typische Beispiele sind

- a) die Zerlegung eines signierten Maßes bzw. eines beschränkten, linearen Funktional in einen Positiv- und Negativ-Teil;
- b) die Lebesguesche Maß-Fortsetzung mittels innerer und äußerer Maße bzw. die Daniellsche Integral-Fortsetzung mittels Unter- und Oberintegrale.

Diese Tatsache liegt in Gemeinsamkeiten von Maß und Integral begründet:

1. Sowohl der Definitionsbereich eines Maßes als auch der eines Integrals besitzt eine natürliche Ordnungsstruktur und bildet diesbezüglich einen Verband.
2. Als Funktional v auf einem Verband V genügt sowohl ein Maß als auch ein Integral der folgenden Funktionalgleichung:

$$v(a \vee b) + v(a \wedge b) = v(a) + v(b) \quad \text{für } a, b \in V.$$

Maße und Integrale sind also Bewertungen im Sinne von Birkhoff (siehe [BF], p. 230)¹⁾.

3. Die σ -Stetigkeit eines nicht-negativen Maßes bzw. eines nicht-negativen Integrals läßt sich in gleicher Weise und ausschließlich mit Hilfe der zugrundeliegenden Ordnung beschreiben.

Wichtige Aussagen der Maß- und Integrationstheorie können unter alleiniger Verwendung der Ordnungsstruktur formuliert und bewiesen werden. So wurde die dem obigen Beispiel a) entsprechende Aussage

¹⁾ Buchstaben in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

für Bewertungen von Birkhoff (siehe [BF], p.239) und Bauer (siehe [BR]) bewiesen. Ebenso ist es möglich, den Daniellschen bzw. Lebesgueschen Fortsetzungsprozeß (vgl. Beispiel b)) auf den Fall isotoner Bewertungen zu verallgemeinern, falls der zugrundeliegende Verband in einen modularen, σ -stetigen Verband einbettbar ist (siehe [AN], §§1-5).

Bisher noch nicht betrachtet wurde eine Topologie auf dem Raum $\mathcal{W}_\rho(V)$ der isotonen Bewertungen auf V . Ziel dieser Arbeit ist es daher, für ein Paar (A^i, A^s) von Teilmengen von V die Struktur der von (A^i, A^s) erzeugten schwachen Topologie $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ auf $\mathcal{W}_\rho(V)$ zu untersuchen, d.h. der größten Topologie auf $\mathcal{W}_\rho(V)$ derart, daß die Abbildungen $\hat{a} : v \mapsto v(a)$ für $a \in A^i$ bzw. $a \in A^s$ nach oben bzw. unten halbstetig sind. Besonderes Interesse gilt dabei der Angabe von hinreichenden Bedingungen für die Metrisierbarkeit sowie der Charakterisierung der relativ kompakten Teilmengen in den durch zusätzliche Stetigkeitsforderungen an die Bewertungen definierten Unterräume von $\mathcal{W}_\rho(V)$.

Die Frage nach der Existenz nicht konstanter, bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ stetiger, reeller Funktionen auf $\mathcal{W}_\rho(V)$, die sich insbesondere bei dem Metrisationsproblem stellt, führt zur Konstruktion eines "Funktionenverbandes über V ", in dem vor allem die " (A^i, A^s) -stetigen Funktionen" von Bedeutung sind; für jede (A^i, A^s) -stetige Funktion h ist nämlich durch eine geeignete "Integration" $v \mapsto \int h dv$ eine bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ stetige Abbildung auf $\mathcal{W}_\rho(V)$ gegeben. Bei der Charakterisierung der relativ kompakten Teilmengen wird ferner wesentlich von der Möglichkeit der stetigen Fortsetzung von "schwach stetigen" Bewertungen Gebrauch gemacht.

Neben Teil III, in dem die schwache Topologie Gegenstand der Betrachtungen ist, werden daher in den beiden ersten, weitgehend selbständigen Teilen I und II die Fortsetzung von Bewertungen und die Zuordnung zwischen "Maß" und "Integral" behandelt.

Im folgenden sollen mittels einer Inhaltsübersicht verwendete Methoden und die wichtigsten Ergebnisse erläutert werden; auf Interpretation dabei gewählter Bezeichnungen anhand der klassischen Fälle wird hier verzichtet.

Die Ausgangssituation, die der gesamten Arbeit zugrunde liegt, bilden ein unendlich distributiver, vollständiger Verband W , ein Unterverband V von W und ein Paar (A^i, A^s) von Teilmengen von V , wobei A^i bzw. A^s mit endlich vielen Elementen auch deren Infimum bzw. Supremum enthält. Die Distributivität von W wird wesentlich bei dem in Teil I behandelten Fortsetzungsprozeß ausgenutzt. Offen bleibt die Frage, ob für einen modularen, stetigen Verband die später vor allem benötigte Aussage von Theorem 2.14 richtig ist. Dagegen bedeutet die Vollständigkeit von W keine Einschränkung, da jeder unendlich distributive Verband vollständig isomorph in einen unendlich distributiven, vollständigen Verband eingebettet werden kann (siehe [FA]). In den Anwendungen ist der zugrundeliegende Verband meist in natürlicher Weise gegeben (siehe Beispiele zur Vereinbarung 1.1).

Bei der Klassifizierung der Bewertungen auf V gemäß ihren Stetigkeitseigenschaften bzgl. (A^i, A^s) wird zwischen abzählbaren und beliebig unendlichen Operationen unterschieden, also zwischen (A^i, A^s) - σ -stetigen und (A^i, A^s) - τ -stetigen Bewertungen (Def.1.3). Ein weiterer grundlegender Begriff ist der der (A^i, A^s) -Regularität von Bewertungen (Def.1.15). In §1 werden elementare Aussagen über Regularitäts- und Stetigkeitseigenschaften zusammen-

gestellt. Insbesondere wird ein Eindeutigkeitssatz für (A^i, A^S) - φ -stetige Bewertungen bewiesen (Th.1.14); dabei ist wie im folgenden stets $\varphi \in \{\sigma, \tau\}$.

Im Anschluß an die Diskussion des Begriffs der schwachen (A^i, A^S) - φ -Stetigkeit (Def.2.1) wird im zentralen Ergebnis von §2 gezeigt, daß die schwache (A^i, A^S) - φ -Stetigkeit einer Bewertung eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer (A^i, A^S) - φ -stetigen Fortsetzung ist (Th.2.14). Der Fortsetzungsprozeß stellt dabei eine Verallgemeinerung des Lebesgue- bzw. Daniell-Verfahrens dar. Für den im Korollar 2.15 behandelten Spezialfall $\varphi = \sigma$ und $A^i = V = A^S$ wurde die Aussage des Theorems 2.14 von Alfsen gezeigt (siehe [AN], Th.5 und Th.6). Im letzten Abschnitt von §2 werden dann mittels Theorem 2.14 verschiedene, bekannte Ergebnisse der klassischen Maßtheorie abgeleitet.

In §3 wird zunächst eine auf Carathéodory (vgl. [CY], 3.Kap.) zurückgehende Konstruktion eines Funktionenverbandes $\mathcal{F}(W)$ über W durchgeführt. Die Elemente von $\mathcal{F}(W)$, die nach Carathéodory "Ortsfunktionen" genannt werden, sind die Äquivalenzklassen in der Menge der antitonen Abbildungen von $[0,1]$ in W bzgl. der Äquivalenzrelation $y_1 \sim y_2 \iff y_1(s) \leq y_2(t)$ und $y_2(s) \leq y_1(t)$ für $s, t \in [0,1]$ mit $s > t$. Falls es sich bei W um den Verband der Teilmengen einer Menge X handelt, ist $\mathcal{F}(W)$ vollständig isomorph zum Verband der $[0,1]$ -wertigen Funktionen auf X ; dabei ist die Abbildung, die jeder $[0,1]$ -wertigen Funktion die Äquivalenzklasse mit dem Element $t \mapsto \{f > t\}$ zuordnet, ein geeigneter Isomorphismus. Mit der Carathéodoryschen Integrationstheorie für

Ortsfunktionen über einem Somenring ergeben sich jedoch keine weiteren Übereinstimmungen, da Carathéodory die zugrundeliegende Ringstruktur wesentlich ausnutzt.

Im zweiten Abschnitt von §3 werden Bewertungen auf dem Unterverband $\mathcal{L}(V)$ der "V-meßbaren" Ortsfunktionen von $\mathcal{F}(W)$ betrachtet (Def.3.5). Jeder Bewertung v auf V ist durch

$$I_v(h) := \int_0^1 v(h(t)) dt \quad \text{für } h \in \mathcal{L}(V)$$

ein "Integral" I_v auf $\mathcal{L}(V)$ zugeordnet. I_v ist eine "affine" Bewertung auf $\mathcal{L}(V)$ (Def.3.8), und umgekehrt besitzt jede affine Bewertung auf $\mathcal{L}(V)$ eine derartige Darstellung mittels einer Bewertung auf V (Th.3.12).

Von besonderer Bedeutung sind im folgenden die V-meßbaren und "bzgl. (A^i, A^S) nach oben bzw. unten halbstetigen" Ortsfunktionen (Def.3.13), die mit $\zeta_O^i(A^i, A^S)$ bzw. $\zeta_O^S(A^i, A^S)$ bezeichnet werden. Es zeigt sich (Satz 3.17), daß eine Bewertung $v|V$ genau dann schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetig ist, wenn das zugehörige "Integral" I_v auf $\mathcal{L}(V)$ schwach $(\zeta_O^i(A^i, A^S), \zeta_O^S(A^i, A^S))$ - ϕ -stetig ist. Auf Ableitung weiterer Invarianten bei der Zuordnung $v \leftrightarrow I_v$ wird verzichtet, da nur die Invarianz der schwachen Stetigkeit Anwendung findet. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz (A^i, A^S) -stetiger und V-meßbarer Ortsfunktionen ist dabei die Normalität des Paares (A^i, A^S) (Def.3.20, Teil 1.), denn in diesem Fall existiert zu $a \in A^i$ und $b \in A^S$ mit $a \leq b$ eine Ortsfunktion $h \in \zeta_O(A^i, A^S) := \zeta_O^i(A^i, A^S) \cap \zeta_O^S(A^i, A^S)$ mit $a \leq h \leq b$. Unter Verwendung dieser Tatsache kann gezeigt werden, daß für ein "streng normales" Paar (A^i, A^S) (Def.3.20, Teil 2.) jede affine Bewertung auf $\zeta_O(A^i, A^S)$ eine eindeutige

Darstellung mittels einer (A^i, A^s) -regulären Bewertung auf V besitzt (Th.3.25). Dieses Ergebnis wird im letzten Abschnitt von §3 auf die klassische Situation der Darstellung positiver, linearer Funktionale auf dem Vektorverband der stetigen Funktionen bzw. der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger eines topologischen Raumes angewendet.

Teil III behandelt die oben definierte schwache Topologie $\gamma(A^i, A^s)$ auf $\mathcal{W}_\phi(V)$, sowie deren Relativtopologie auf den Unterräumen $\mathcal{W}_\phi(V; A^i, A^s)$ der schwach (A^i, A^s) - ϕ -stetigen Bewertungen. Zur Klassifizierung der Bewertungen muß dabei die schwache Stetigkeit benutzt werden, da V im allgemeinen nicht die für die Stetigkeit gemäß Definition 1.3 notwendige Abgeschlossenheitseigenschaft besitzt. Zwar besitzt jede schwach stetige Bewertung gemäß Theorem 2.14 genau eine stetige Fortsetzung, doch ergeben sich für die Fortsetzungen im allgemeinen unterschiedliche Definitionsbereiche.

Eine Zusammenstellung grundlegender Eigenschaften der Topologie $\gamma(A^i, A^s)$ erfolgt in §4. Insbesondere wird gezeigt, daß die Abbildung $v \mapsto I_v$ von $(\mathcal{W}_\phi(V), \gamma(A^i, A^s))$ in den Raum der affinen Bewertungen auf $\mathcal{X}(V)$, versehen mit der schwachen Topologie $\gamma(\mathcal{C}_0^i(A^i, A^s), \mathcal{C}_0^s(A^i, A^s))$, ein Homöomorphismus ist (Satz 4.11). Daraus ergibt sich die eingangs angedeutete Aussage, daß für jede Ortsfunktion $h \in \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ die reellwertige Abbildung $v \mapsto I_v(h)$ bzgl. $\gamma(A^i, A^s)$ stetig ist (Satz 4.12). Ferner wird auf den Unterräumen $\mathcal{W}_\phi(V; A^i, A^s)$ die schwache Topologie auf spezielle Trennbarkeitseigenschaften hin untersucht. Ein in §6 benötigtes Ergebnis besagt, daß $(\mathcal{W}_\phi(V; A^i, A^s), \gamma(A^i, A^s))$ ein

regulärer Hausdorff-Raum ist, falls das Paar (A^i, A^s) φ -regulär (Def.4.23) und V bzgl. $A^i \cup A^s$ nicht "zu groß" ist (Satz 4.25). Abschnitt 4.4 stellt für $v \in \mathcal{W}_\rho(V)$ den Zusammenhang zwischen den bzgl. (A^i, A^s) v -randlosen Elementen in V (Def.4.26) und den bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ gegen v konvergenten Netzen her.

In §5 werden zunächst Pseudo-Metriken d_h und d'_h auf $\mathcal{W}_\rho(V)$ betrachtet, die in natürlicher Weise für jede Ortsfunktion $h \in \mathcal{L}(V)$ definiert sind (Def.5.1). Für eine stetige Ortsfunktion $h \in \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ ergibt sich aus der Stetigkeit der Abbildung $v \mapsto I_v(h)$, daß die von d_h bzw. d'_h erzeugte Topologie auf $\mathcal{W}_\rho(V)$ gröber ist als $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ (Satz 5.4). Dann wird eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer abzählbaren Familie $\mathcal{K}$ stetiger Ortsfunktionen angegeben derart, daß die von $\{d_h : h \in \mathcal{K}\}$ bzw. $\{d'_h : h \in \mathcal{K}\}$ erzeugte Topologie auf $\mathcal{W}_\rho(V; A^i, A^s)$ mit $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ übereinstimmt (Th.5.6). Für den Unterraum $\mathcal{W}_T(V; A^i, A^s)$ läßt sich eine Lösung des Metrisationsproblems nur unter sehr einschränkenden, zusätzlichen Voraussetzungen finden (siehe Bemerkung zu Satz 5.6).

Der abschließende §6 gibt ein Kriterium für die relative Kompaktheit einer Teilmenge im Unterraum $(\mathcal{W}_\rho(V; A^i, A^s), \mathcal{T}(A^i, A^s))$ an. Da ein elementares Ergebnis besagt (Satz 6.2), daß ein in $\mathcal{W}_\rho(V; A^i, A^s)$ bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ konvergentes Netz notwendig "gleichgradig schwach (A^i, A^s) - φ -stetig" ist (Def.6.1), befaßt sich der erste Abschnitt von §6 mit der gleichgradigen Stetigkeit von Teilmengen und Netzen in $\mathcal{W}_\rho(V; A^i, A^s)$. Mit den Ergebnissen von Abschnitt 6.1 wird dann gezeigt (Th.6.8), daß für ein φ -reguläres Paar (A^i, A^s) und ein bzgl. $A^i \cup A^s$ nicht "zu großes" V

eine punktweise beschränkte Teilmenge von $\mathcal{W}_\phi(V; A^i, A^S)$ genau dann in $(\mathcal{W}_\phi(V; A^i, A^S), \tau(A^i, A^S))$ relativ kompakt ist, wenn sie gleichgradig schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetig ist.

Für Borel-Maße auf einem topologischen Raum ist die gleichgradige Straffheit ein Kriterium für die gleichgradige schwache (A^i, A^S) - τ -Stetigkeit, wenn A^i bzw. A^S die Gesamtheit der abgeschlossenen bzw. offenen Mengen bezeichnet; dieses Kriterium wird in einem der Beispiele des Abschnitts 6.3 benutzt. Versuche, den Begriff "straff" auf Bewertungen zu verallgemeinern, haben jedoch bisher zu keinem befriedigenden Ergebnis geführt; dies kommt nicht unerwartet, da bereits im klassischen Fall die Straffheit linearer Funktionale auf dem Vektorverband der stetigen Funktionen eines topologischen Raumes unter Zuhilfenahme kompakter Mengen definiert wird.

Herrn Prof. Dr. H.G. Kellerer danke ich für die Betreuung dieser Arbeit.

Vorbemerkungen

Definitionen, Lemmata, Korollare, Sätze und Theoreme sind durch einen senkrechten Strich am linken Rand gekennzeichnet, und ihre Numerierung geschieht fortlaufend und paragraphenweise.

Um die Ausführungen nicht unnötig oft durch Definitionen unterbrechen zu müssen, folgt eine Zusammenstellung von Bezeichnungen, die in der Literatur nicht oder nur uneinheitlich verwendet werden und deren Einführung an der Stelle ihres ersten Auftretens nicht unbedingt notwendig erscheint. Im Symbolverzeichnis sind sie den im Text definierten Bezeichnungen vorangestellt.

1. Eine σ -additive bzw. additive, $[0, +\infty]$ -wertige Abbildung μ auf einer σ -Algebra bzw. Algebra über einer Grundmenge X mit $\mu(\emptyset) = 0$ heißt "Maß" bzw. "Inhalt". Für $x \in X$ ist δ_x das Maß mit auf x konzentrierter Masse 1.
2. Der Begriff "Funktion" wird ausschließlich für reellwertige Abbildungen benutzt. Ist X ein topologischer Raum, so bezeichnet
 - a) $\mathcal{C}^i(X)$ bzw. $\mathcal{C}^s(X)$ die Gesamtheit der nach oben bzw. unten halbstetigen und beschränkten Funktionen auf X ;
 - b) $\mathcal{C}(X)$ die Gesamtheit der stetigen und beschränkten Funktionen auf X ;
 - c) $\mathcal{K}(X)$ die Gesamtheit der stetigen Funktionen auf X mit kompaktem Träger;
 - d) $\mathcal{J}(X)$ bzw. $\mathcal{F}(X)$ bzw. $\mathcal{R}(X)$ die Gesamtheit der offenen bzw. abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen von X ;
 - e) $\mathcal{F}_0(X) := \{ \{f = 0\} : f \in \mathcal{C}(X) \}$ bzw.
 $\mathcal{Z}_0(X) := \{ \{f \neq 0\} : f \in \mathcal{C}(X) \}$ die Gesamtheit der Zero- bzw. Cozero-Mengen;

- f) $\mathcal{L}(X)$ bzw. $\mathcal{L}_0(X)$ die von $\mathcal{P}(X)$ bzw. $\mathcal{P}_0(X)$ erzeugte σ -Algebra;
 g) A^a bzw. A^o die abgeschlossene Hülle bzw. den offenen Kern einer Teilmenge A von X .

Ein Baire- bzw. Borel-Maß auf X ist ein finites Maß auf $\mathcal{L}_0(X)$ bzw. $\mathcal{L}(X)$.

3. Für eine Menge A bedeutet

$$|A| \leq \rho \text{ bzw. } |A| \leq \sigma \text{ bzw. } |A| \leq \tau,$$

daß A endlich bzw. abzählbar bzw. von beliebiger Mächtigkeit ist. Die Menge $\Phi := \{\rho, \sigma, \tau\}$ ist durch $\rho < \sigma < \tau$ geordnet, und für den Vorgänger eines Elementes $\varphi \in \{\sigma, \tau\}$ wird abkürzend $\varphi-1$ geschrieben. Ferner werden in Verbindung mit $\varphi \in \Phi$ folgende Bezeichnungen verwendet:

Eine Abbildung Θ von einem Verband W in einen Verband W' heißt

a) "isoton" bzw. "antiton", falls $\Theta(a) \leq \Theta(b)$ bzw.

$$\Theta(a) \geq \Theta(b) \text{ für alle } a, b \in W \text{ gilt mit } a \leq b;$$

b) " φ -Morphismus", falls für eine Teilmenge A von W mit

$$|A| \leq \varphi \text{ und existierendem Supremum bzw. Infimum gilt:}$$

$$\Theta(\sup A) = \sup_{a \in A} \Theta(a) \quad \text{und} \quad \Theta(\inf A) = \inf_{a \in A} \Theta(a);$$

c) "Isomorphismus", falls Θ ein bijektiver ρ -Morphismus ist.

Ein Isomorphismus ist stets ein τ -Morphismus.

Ist A eine Teilmenge eines Verbandes W , so heißt

d) A "nach unten" bzw. "oben [bedingt] φ -geschlossen (in W)",

falls jede nicht-leere [in W nach unten bzw. oben beschränkte] Teilmenge B von A mit $|B| \leq \varphi$ ein Infimum bzw.

Supremum in W besitzt und dieses ein Element von A ist;

e) A "bedingt φ -vollständig (in W)", falls A nach unten und oben bedingt φ -geschlossen ist;

- f) A " φ -System (in W)", falls A nach unten und oben φ -geschlossen ist;
- g) A "monotones System (in W)", falls das Supremum bzw. Infimum jeder isotonen bzw. antitonen Folge aus A existiert und ein Element von A ist;
- h) W " φ -Verband", falls W ein φ -System in W ist;
- i) W " φ -distributiv", falls für $b \in W$ und $C \subset W$ mit $|C| \leq \varphi$ und $\underline{c} = \inf C$ bzw. $\bar{c} = \sup C$ gilt:
- $$\inf_{c \in C} (c \vee b) \text{ existiert mit } \underline{c} \vee b = \inf_{c \in C} (c \vee b) \text{ bzw.}$$
- $$\sup_{c \in C} (c \wedge b) \text{ existiert mit } \bar{c} \wedge b = \sup_{c \in C} (c \wedge b).$$

Es wird die bekannte Tatsache verwendet, daß in einem σ -distributiven σ -Verband die "monotone Hülle" eines ρ -Systems A, d.h. das kleinste A enthaltene monotone System, ein ρ -System und damit ein σ -System ist.

Ist A eine Teilmenge eines φ -Verbandes W, so bezeichnet

- j) A_{φ} bzw. A^{φ} die kleinste A enthaltene nach unten bzw. oben φ -geschlossene Teilmenge in W;
- k) $\varphi(A)$ das kleinste A enthaltene φ -System in W.

In einem distributiven Verband W steht das Symbol $\langle \underline{a}, b, \bar{a} \rangle$ für das Medium $((\underline{a} \wedge \bar{a}) \vee b) \wedge (\underline{a} \vee \bar{a}) = (\underline{a} \wedge \bar{a}) \vee (b \wedge (\underline{a} \vee \bar{a}))$ der Elemente $\underline{a}, b, \bar{a} \in W$.

Der zu einer Menge X und einem Verband W gehörige Produkt-
raum W^X sei stets mit der Produktordnung versehen. Insbesondere ist also $\tilde{\mathbb{R}}^X$ der τ -distributive τ -Verband der $\tilde{\mathbb{R}}$ -wertigen Abbildungen auf X. Dabei bezeichnet $\tilde{\mathbb{R}}$ die durch $-\infty$ und $+\infty$ erweiterte reelle Zahlengerade mit der gewöhnlichen Ordnung.

Im Verband $\mathcal{P}(X)$ aller Teilmengen einer Menge X wird für die Differenz zweier Teilmengen A, B von W mit $A \subset B$ das Zeichen $B \setminus A$ verwendet und für das Komplement einer Teilmenge A von X die Abkürzung $\bar{A}$, sofern keine Mißverständnisse zu befürchten sind.

Teil I Stetigkeit und Fortsetzung von Bewertungen

§1. Elementare Eigenschaften

1.1. Ausgangssituation

Zunächst wird eine für die gesamte Arbeit gültige Vereinbarung getroffen.

VEREINBARUNG 1.

Es bezeichnet stets

- (1) W einen nicht-leeren τ -distributiven τ -Verband;
- (2) $V \subset W$ ein nicht-leeres ρ -System;
- (3) $A^i, A^s \subset V$ ein Paar von Teilmengen von V , wobei
 A^i nach unten und A^s nach oben ρ -geschlossen ist.

Bemerkung:

Da W ein τ -Verband ist, besitzt W ein kleinstes bzw. größtes Element 0 bzw. 1 , und für Netze in W ist die Ordnungskonvergenz erklärt.

Unter diese Ausgangssituation fallen die

Beispiele:

- 1. Sei $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra über einer Grundmenge X .
 - a) $W = \mathcal{P}(X)$ mit der gewöhnlichen Ordnung;
 $V = \mathcal{A}$ und $A^i = V = A^s$.
 - b) $W = \tilde{\mathbb{R}}^X$; $V = \{ f \in W : f \text{ reellwertig und } \mathcal{A}\text{-meßbar} \}$;
 $A^i = \emptyset = A^s$.
 - c) $\mathcal{N}$ bezeichne das Nullmengenideal eines σ -finiten Maßes auf $\mathcal{A}$. Dann ist die Quotientenalgebra $W = \mathcal{A}/\mathcal{N}$ ein τ -distributiver τ -Verband (siehe [SI], §19(9) und §21 D)); $V = W$ und $A^i = V = A^s$.

2. Sei $(X, \mathcal{Q}(X))$ ein topologischer Raum.

a) $W = \mathcal{P}(X)$; $A^i = \mathcal{F}_0(X)$ und $A^s = \mathcal{Q}_0(X)$;

$V = \rho(\mathcal{F}_0(X) \cup \mathcal{Q}_0(X))$ (d.h. V ist die von $\mathcal{F}_0(X)$ oder $\mathcal{Q}_0(X)$ erzeugte Algebra).

b) $W = \mathcal{P}(X)$; $V = \mathcal{L}(X)$; $A^i = \mathcal{F}(X)$ und $A^s = \mathcal{Q}(X)$.

c) $W = \tilde{\mathcal{R}}^X$; $V = \{ (f: X \mapsto \mathbb{R}) : f \text{ beschränkt und } \mathcal{L}(X)\text{-meßbar} \}$;
 $A^i = \mathcal{C}^i(X)$ und $A^s = \mathcal{C}^s(X)$.

d) $W = \tilde{\mathcal{R}}^X$; $V = \mathcal{K}(X)$ und $A^i = V = A^s$.

Die Paare (A^i, A^s) aus den vorhergehenden Beispielen sind in dem Sinne dual, daß ein "Dual-Isomorphismus" θ von W in sich existiert mit $\theta[A^i] = A^s$ (vgl. [BF], §1.2.). Beispielsweise ist $\theta_1: A \mapsto \mathbb{C}A$ auf $\mathcal{P}(X)$ und $\theta_2: f \mapsto -f$ auf $\tilde{\mathcal{R}}^X$ ein Dual-Isomorphismus. In der obigen Vereinbarung wird keine Dualität verlangt. Die in einigen Sätzen dieser Arbeit an A^i und A^s gestellten Bedingungen reduzieren sich jedoch bei Dualität von A^i und A^s auf eine Bedingung an A^i (bzw. A^s).

Bei "dualen Aussagen" wird der Beweis stets nur für einen Fall durchgeführt.

1.2. φ -Stetigkeit

Zusätzlich zu der ersten Vereinbarung wird ebenfalls für die gesamte Arbeit festgelegt:

VEREINBARUNG 2.

Es gilt stets $\varphi \in \{\sigma, \tau\}$.

Von grundlegender Bedeutung sind im folgenden die verschiedenen Stetigkeitsbegriffe.

DEFINITION 3.

Sei v eine Abbildung von V nach $\tilde{\mathcal{R}}$.

1.a) $v|V$ heißt "bzgl. A^i nach unten σ -stetig", wenn

(i) $v|V$ isotone ist;

(ii) für jede antitone Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A^i mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} v(a_n) \in \mathbb{R}$ gilt:
 $\inf_{n \in \mathbb{N}} v(a_n) \in V$ und $v(\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} v(a_n)$.

b) $v|V$ heißt "bzgl. A^S nach oben σ -stetig", wenn

(i) $v|V$ isotone ist;

(ii) für jede isotone Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A^S mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} v(a_n) \in \mathbb{R}$ gilt:
 $\sup_{n \in \mathbb{N}} v(a_n) \in V$ und $v(\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} v(a_n)$.

2.a) $v|V$ heißt "bzgl. A^i nach unten τ -stetig", wenn

(i) $v|V$ bzgl. V nach unten σ -stetig ist;

(ii) für jede nicht-leere absteigend gerichtete Familie $U \subset A^i$ mit $\inf_{u \in U} v(u) \in \mathbb{R}$ gilt:
 $\inf_{u \in U} v(u) \in V$ und $v(\inf U) = \inf_{u \in U} v(u)$.

b) $v|V$ heißt "bzgl. A^S nach oben τ -stetig", wenn

(i) $v|V$ bzgl. V nach oben σ -stetig ist;

(ii) für jede nicht-leere aufsteigend gerichtete Familie $U \subset A^S$ mit $\sup_{u \in U} v(u) \in \mathbb{R}$ gilt:
 $\sup_{u \in U} v(u) \in V$ und $v(\sup U) = \sup_{u \in U} v(u)$.

3. $v|V$ heißt " (A^i, A^S) - ϕ -stetig", wenn

(a) $v|V$ bzgl. A^i nach unten ϕ -stetig ist;

(b) $v|V$ bzgl. A^S nach oben ϕ -stetig ist.

Bezeichnungen:

Es werden folgende Abkürzungen verwendet:

a) " A - ϕ -stetig" statt " (A, A) - ϕ -stetig", falls $A^i = A = A^S$.

b) " ϕ -stetig" statt " V - ϕ -stetig".

Bemerkungen:

1.a) Jede (A^i, A^S) - τ -stetige Abbildung auf V ist auch σ -stetig.

b) Jede σ -stetige Abbildung ist auch $\emptyset$ - τ -stetig.

2. Eine isotone Abbildung von V nach $\tilde{\mathbb{R}}$ ist genau dann bzgl. A^i

nach unten σ -stetig, wenn für jede nicht-leere, abzählbare

Familie $U \subset A^i$ mit $\underline{y} := \inf_{u \in U} v(u) \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\underline{u} := \inf U \in V \quad \text{und} \quad v(\underline{u}) = \underline{y}.$$

Analog lassen sich die Teile 1.b), 2.a) und 2.b) der vorhergehenden Definition umformulieren.

Eine reellwertige, beschränkte und (A^i, A^S) - $\emptyset$ -stetige Abbildung $v|V$ ist auch $((A^i)_{\emptyset}, (A^S)_{\emptyset})$ - $\emptyset$ -stetig, denn es gilt

SATZ 4.

Sei $v|V$ eine bzgl. A^i nach unten $\emptyset$ -stetige Abbildung und $A^i_{\emptyset, v} := \{ \inf U : \emptyset \neq U \subset A^i \text{ mit } |U| \leq \emptyset \text{ und } \inf_{u \in U} v(u) \in \mathbb{R} \}$.

Dann ist $v|V$ auch bzgl. $A^i_{\emptyset, v}$ nach unten $\emptyset$ -stetig.

Die duale Aussage gilt ebenfalls.

Beweis:

Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß $v|V$ reellwertig ist. Aus der Voraussetzung folgt sofort $A^i_{\emptyset, v} \subset V$.

Sei $U \subset A^i_{\emptyset, v}$ gegeben mit $|U| \leq \emptyset$ und $\inf_{a \in U} v(a) \in \mathbb{R}$.

Zu $a \in U$ existiert also $U_a \subset A^i$ mit $a = \inf U_a$ und $|U_a| \leq \emptyset$.

Für $U^{\wedge} := \bigcup_{a \in U} U_a$ gilt dann:

(α) $U^{\wedge} \subset A^i$ und $|U^{\wedge}| \leq \emptyset$;

(β) $\underline{a} := \inf U = \inf U^{\wedge}$;

Da zu $u \in U^{\wedge}_{\emptyset}$ stets ein $a \in U_{\emptyset}$ existiert mit $u \geq a$, gilt ferner:

(γ) $\inf_{u \in U^{\wedge}_{\emptyset}} v(u) \geq \inf_{a \in U_{\emptyset}} v(a)$,

(δ) $\inf_{u \in U^{\wedge}_{\emptyset}} v(u) \in \mathbb{R}$.

Es folgt:

$$\underline{a} \in V \quad \text{und} \quad v(\underline{a}) = \inf_{u \in U_{\rho}^{\underline{a}}} v(u) \geq \inf_{a \in U_{\rho}} v(a) .$$

Die Gültigkeit der umgekehrten Ungleichung ist trivial. └

Bemerkung:

Das erste der folgenden Beispiele zeigt:

Eine bzgl. A^i nach unten ϕ -stetige Abbildung $v|V$ ist im allgemeinen nicht bzgl. $(A^i)^{\rho}$ nach unten ϕ -stetig. Das gilt auch dann, wenn zusätzlich $v|V$ beschränkt und (im Sinne von Definition 5) additiv ist.

Beispiele:

1. a) Sei W der Mengenverband $\mathcal{P}([0,1])$ und A^i die Gesamtheit aller Teilintervalle von $[0,1]$. Dann ist das Lebesgue-Maß λ auf $V := \mathcal{L}([0,1])$ bzgl. A^i nach unten τ -stetig, jedoch nicht bzgl. $(A^i)^{\rho}$, da $(A^i)^{\rho}$ die Komplemente endlicher Teilmengen von $[0,1]$ enthält.
b) Sei W und A^i wie in Teil a), $B^i := \{ I \cap \mathbb{Q} : I \in A^i \}$ und $V^i := \rho(B^i)$. Dann existiert genau ein Inhalt μ auf V^i mit $\mu(I \cap \mathbb{Q}) = \lambda(I)$ für $I \in A^i$. $\mu|V^i$ ist bzgl. B^i nach unten σ -stetig, jedoch nicht bzgl. $(B^i)^{\rho}$.
2. Sei X ein topologischer Raum, der eine abzählbare Basis besitzt. Dann ist gemäß Satz 4 auf X jedes Borel-Maß $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ - τ -stetig.
3. Sei X eine nicht-leere Menge und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ein ρ -System. Ferner sei f eine streng isotone und stetige Abbildung von $\tilde{\mathbb{R}}$ nach $\mathbb{R}$. Dann sind die Choquetschen $\mathcal{F}$ -Kapazitäten (vgl. [MR]; III.D18) diejenigen Abbildungen v von $\mathcal{P}(X)$ nach $\tilde{\mathbb{R}}$, für die gilt: $f \circ v$ ist $(\mathcal{F}, \mathcal{P}(X))$ - σ -stetig. Die Abbildung f erzwingt die Stetigkeit von v "bei unendlich" und ist daher unnötig, falls v reellwertig ist.

Bemerkung:

Sei $v|V$ eine σ -stetige Abbildung und $L := \{ a \in V : v(a) \in \mathbb{R} \}$.
 Dann ist $v|L$ ebenfalls σ -stetig und für $v|L$ gelten das
 "Lemma von Fatou" und der "Satz von Lebesgue" (vgl. [AN],
 Th.1 und Th.2 ; es wird nur die σ -Stetigkeit ausgenutzt).

1.3. Additivität

In diesem Abschnitt werden häufiger verwendete Hilfsaussagen über
 additive bzw. halbadditive Abbildungen zusammengestellt.

DEFINITION 5.

Sei v eine Abbildung von V nach $\bar{\mathbb{R}}$.

1. $v|V$ heißt "unteradditiv", wenn

- (i) $V^+ := \{ a \in V : v(a) < +\infty \}$ ein ρ -System ist,
- (ii) $v(a \vee b) + v(a \wedge b) \leq v(a) + v(b)$ für $a, b \in V^+$.

2. $v|V$ heißt "oberadditiv", wenn

- (i) $V^- := \{ a \in V : v(a) > -\infty \}$ ein ρ -System ist,
- (ii) $v(a \vee b) + v(a \wedge b) \geq v(a) + v(b)$ für $a, b \in V^-$.

3. $v|V$ heißt "additiv", wenn

$v|V$ unteradditiv und oberadditiv ist.

Ein Beweis zum folgenden Lemma findet sich bei Alfsen (vgl. [AN],
 Prop.1.2).

LEMMA 6.

Sei v eine isotone Abbildung von V nach $\bar{\mathbb{R}}$. Ferner seien

$\underline{a}_i, \bar{a}_i \in V$ mit $\underline{a}_i \leq \bar{a}_i$ und $v(\underline{a}_i), v(\bar{a}_i) \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$.

a) Ist $v|V$ unteradditiv, so gilt:

$$v\left(\sup_{1 \leq i \leq n} \bar{a}_i\right) - v\left(\sup_{1 \leq i \leq n} \underline{a}_i\right) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} (v(\bar{a}_i) - v(\underline{a}_i)).$$

b) Ist $v|V$ oberadditiv, so gilt:

$$v\left(\inf_{1 \leq i \leq n} \bar{a}_i\right) - v\left(\inf_{1 \leq i \leq n} \underline{a}_i\right) \leq \sum_{1 \leq i \leq n} (v(\bar{a}_i) - v(\underline{a}_i)).$$

Im Spezialfall $n=2$ und $\underline{a}_2 = \overline{a}_2$ ergibt sich

KOROLLAR 7.

Für eine isotone, reellwertige Abbildung $v|V$ und Elemente $a, b, c \in V$ mit $a \leq b$ gilt:

a) $v(b \vee c) - v(a \vee c) \leq v(b) - v(a)$, falls $v|V$ unteradditiv;

b) $v(b \wedge c) - v(a \wedge c) \leq v(b) - v(a)$, falls $v|V$ oberadditiv.

Eine reellwertige Abbildung $v|V$ ist genau dann additiv, wenn sie der folgenden Funktionalgleichung genügt:

$$v(a \vee b) + v(a \wedge b) = v(a) + v(b) \quad \text{für } a, b \in V.$$

Darüber hinaus erhält man mittels vollständiger Induktion den folgenden "allgemeinen Additionssatz" (vgl. [HS], §9, Ex.(2)):

SATZ 8.

Sei v eine reellwertige und additive Abbildung auf V . Für eine endliche, nicht-leere Teilmenge U von V gilt dann:

$$a) \quad v(\inf U) = \sum_{\emptyset \neq T \subset U} (-1)^{|T|-1} v(\sup T);$$

$$b) \quad v(\sup U) = \sum_{\emptyset \neq T \subset U} (-1)^{|T|-1} v(\inf T)$$

Das abschließende Lemma macht Aussagen über die Additivität und Stetigkeit einer "unteren Bewertung" $v_*|W$ bzw. einer "oberen Bewertung" $v^*|W$, die folgendermaßen definiert ist:

DEFINITION 9.

Für eine isotone Abbildung v von V nach $\widetilde{\mathbb{R}}$ sei

$$a) \quad v_*(b) := \sup\{ v(a) : V \ni a \leq b \} \quad \text{für } b \in W \quad (\sup \emptyset = -\infty);$$

$$b) \quad v^*(b) := \inf\{ v(a) : V \ni a \geq b \} \quad \text{für } b \in W \quad (\inf \emptyset = +\infty).$$

ϕ -Stetigkeit und Additivität bleiben beim Übergang von $v|V$ zu $v_*|W$ (bzw. $v^*|W$) im allgemeinen nicht erhalten. Dagegen gilt stets

LEMMA 10.

Sei $v|V$ eine isotone und oberadditive Abbildung nach $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Dann ist

(α) $v_*|W$ isoton und oberadditiv;

(β) $v_*|W$ bzgl. W nach unten σ -stetig, falls
 $v|V$ bzgl. V nach unten σ -stetig.

Die duale Aussage gilt ebenfalls.

Beweis:

Zu (α): Die Isotonie und die Oberadditivität von $v_*|W$ folgt unmittelbar aus den entsprechenden Eigenschaften von $v|V$.

Zu (β): Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine antitone Folge in W mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} v_*(a_n) \in \mathbb{R}$.

Ohne Einschränkung kann $v_*(a_1) \in \mathbb{R}$ angenommen werden.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann eine Folge $(\underline{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V mit

(1) $a_n \geq \underline{a}_n$ und $v_*(a_n) - v(\underline{a}_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Mit Lemma 6,b) folgt

(2) $v_*(a_n) - \varepsilon < v(\underline{a}_1 \wedge \dots \wedge \underline{a}_n)$.

Da $v|V$ nach unten σ -stetig ist, gilt somit

(3) $\underline{a} := \inf_{n \in \mathbb{N}} \underline{a}_n \in V$ und $v(\underline{a}) = \inf_{n \in \mathbb{N}} v(\underline{a}_1 \wedge \dots \wedge \underline{a}_n)$,

und das führt mit (2) zu

(4) $v_*(\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n) \geq v(\underline{a}) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} v_*(a_n) - \varepsilon$.

1.4. Eindeutigkeit

Das eigentliche Objekt dieser Arbeit sind die "Bewertungen".

DEFINITION 11.

Sei v eine Abbildung auf V . Dann heißt

a) $v|V$ " ρ -Bewertung", wenn $v|V$ reellwertig, isoton und additiv ist;

b) $v|V$ " σ -Bewertung", wenn $v|V$ eine σ -stetige ρ -Bewertung ist.

In diesem Abschnitt wird untersucht, inwieweit Bewertungen schon durch ihre Werte auf Teilmengen des Definitionsbereiches eindeutig bestimmt sind.

Es werden folgende Abkürzungen verwendet.

Bezeichnungen:

Für eine nicht-leere Teilmenge A von W und $c \in W$ sei

$A \wedge c := \{ a \wedge c : a \in A \}$ und $A \vee c := \{ a \vee c : a \in A \}$.

Für den Beweis von Theorem 14 und Theorem 2.14 wird benötigt

LEMMA 12.

Sei $v|V$ eine ρ -Bewertung und $c \in W$ mit $v_*(c) > -\infty$.

Dann ist $v_*|(V \wedge c)$

a) eine ρ -Bewertung;

b) bzgl. $A^i \wedge c$ nach unten ϕ -stetig,

falls $v|V$ bzgl. A^i nach unten ϕ -stetig ist;

c) bzgl. $A^S \wedge c$ nach oben ϕ -stetig,

falls $v|V$ bzgl. A^S nach oben ϕ -stetig ist und die

Restriktion von v auf A^S nach oben beschränkt ist.

Für $v_*|(V \vee c)$ gilt die duale Aussage.

Beweis:

Zu a): Wegen der Distributivität von W ist mit V auch $V \wedge c$

ein ρ -System in W und gemäß Lemma 10, (a) ist $v_*|(V \wedge c)$ oberadditiv. Die Unteradditivität ergibt sich folgendermaßen:

Seien $a_*, b_* \in V \wedge c$ und $a, b \in V$ mit $a_* = a \wedge c$ und $b_* = b \wedge c$.

Für $d, e \in V$ mit $d \leq a_* \wedge b_*$, $e \leq a_* \vee b_*$ und $d \leq e$ gilt dann

$$(1) \quad e \leq c,$$

$$(2) \quad a \wedge b \geq d \quad \text{und} \quad a \vee b \geq e.$$

Wegen $d \leq e$ führt (2) zu

$$(3) \quad (a \wedge e) \wedge (b \wedge e) \geq d \quad \text{und} \quad (a \wedge e) \vee (b \wedge e) = e.$$

Mittels der Additivität von $v|V$ folgt:

$$v(d) + v(e) \stackrel{(3)}{\leq} v((a \wedge e) \wedge (b \wedge e)) + v((a \wedge e) \vee (b \wedge e))$$

$$= v(a \wedge e) + v(b \wedge e)$$

$$\leq v(a) + v(b).$$

Da die Bedingung " $d \leq e$ " keine Einschränkung bedeutet, erhält man:

$$v_*(a_* \wedge b_*) + v_*(a_* \vee b_*) \leq v_*(a_*) + v_*(b_*) .$$

Zu b): Sei $U_* \subset A^i \wedge c$ mit $|U_*| \leq \varphi$ und $\gamma_* := \inf_{a \in (U_*)^\rho} v(a) > -\infty$.

Für $U \subset A^i$ mit $|U| \leq \varphi$ und $U_* = \{u \wedge c : u \in U\}$ gilt dann:

$$\inf_{u \in U^\rho} v(u) \geq \gamma_* > -\infty .$$

Da $v|V$ reellwertig und bzgl. A^i nach unten φ -stetig ist, folgt

$$(4) \quad \underline{u} := \inf U \in V \quad \text{und} \quad v(\underline{u}) = \inf_{u \in U^\rho} v(u) .$$

Gemäß Lemma 10,(a) und Korollar 7,b) gilt

$$v_*(u \wedge c) - v_*(\underline{u} \wedge c) \leq v(u) - v(\underline{u}) \quad \text{für alle } u \in U^\rho .$$

Mit (4) ergibt sich daraus

$$(5) \quad \inf U_* = \underline{u} \wedge c \in V \wedge c \quad \text{und} \quad v_*(\inf U_*) = \inf_{a \in (U_*)^\rho} v(a) .$$

Zu c): Sei $U_* \subset A^S \wedge c$ mit $|U_*| \leq \varphi$ und $U \subset A^S$ mit $U_* = \{u \wedge c : u \in U\}$ und $|U| \leq \varphi$. Da $v|V$ bzgl. A^S nach oben φ -stetig und $v|A^S$ nach oben beschränkt ist, gilt:

$$(6) \quad \bar{u} := \sup U \in V \quad \text{und} \quad v(\bar{u}) = \sup_{u \in U^\rho} v(u) .$$

Mit (6) und Korollar 7,b) ergibt sich für $d \in V$ mit $d \leq \bar{u} \wedge c$:

$$v(d) = v(\bar{u} \wedge d) = \sup_{u \in U^\rho} v(u \wedge d) \leq \sup_{u \in U^\rho} v_*(u \wedge c) .$$

Wegen der φ -Distributivität von W folgt:

$$(7) \quad \sup U_* = \bar{u} \wedge c \in V \wedge c \quad \text{und} \quad v_*(\sup U_*) = \sup_{a \in (U_*)^\rho} v_*(a) .$$

Bemerkung:

In Teil c) des vorhergehenden Lemmas ist die Voraussetzung über die Beschränktheit von $v|A^S$ auch dann wesentlich, wenn c ein Element von V ist, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel:

Im Verband $W := \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist

$$V := \{A \subset \mathbb{R} : A \cap [0, +\infty[\text{ endlich und } A \cap]-\infty, 0[\text{ oder } \mathbb{C}A \cap]-\infty, 0[\text{ abzählbar} \}$$

ein ρ -System und $v|V$ mit $v(A) := |A \cap [0, +\infty[|$ eine σ -Bewertung, die bzgl. $A^S := \{ A \in V : A \text{ symmetrisch bzgl. } 0 \}$ nach oben r -stetig ist. Für $c :=]-\infty, 0[\in V$ ist $v|V$ jedoch nicht bzgl. $A^S \wedge c = \{ A \in]-\infty, 0[: A \text{ endlich} \}$ nach oben r -stetig.

Das nachstehende Theorem 14 findet häufige Anwendung und zwar insbesondere in dem vorgezogenen Spezialfall von Satz 13, der von Alfsen (siehe [AN], Th.7) bewiesen wurde.

SATZ 13.

Seien L_j ($j = 1, 2$) ρ -Systeme in W und $w_j|L_j$ σ -Bewertungen mit

$$(i) \quad V \subset L_j \quad \text{und} \quad w_1|V = w_2|V ;$$

$$(ii) \quad L_j \subset \sigma(V) .$$

Dann ist $L_1 = L_2$ und $w_1 = w_2$.

Setzt man $\phi := \sigma$ und $A^i := \emptyset =: A^S$, so ergibt sich die Aussage von Satz 13 aus der von

THEOREM 14

Seien L_j ($j = 1, 2$) ρ -Systeme in W und $w_j|L_j$ (A^i, A^S) - ϕ -stetige ρ -Bewertungen mit

$$(i) \quad V \subset L_j \quad \text{und} \quad w_1|V = w_2|V ;$$

$$(ii) \quad L_j \subset \psi(V \cup \underline{A}^i \cup \tilde{A}^S), \text{ wobei}$$

$$\psi := \phi - 1 \quad \text{und} \quad \underline{A}^i := (A^i)_\phi \cap L_j, \quad \tilde{A}^S := (A^S)^\phi \cap L_j.$$

Dann ist $L_1 = L_2$ und $w_1 = w_2$.

Beweis:

0. Wegen (i) und der ϕ -Stetigkeit der Bewertungen $w_j|L_j$ sind $\underline{A}^i$ und $\tilde{A}^S$ unabhängig von j definiert, d.h.

$$(A^i)_\phi \cap L_1 = (A^i)_\phi \cap L_2 \quad \text{und} \quad (A^S)^\phi \cap L_1 = (A^S)^\phi \cap L_2.$$

1. Sei $\phi = \sigma$. Dann gilt:

$$(1) \quad L_1 = \rho(V \cup \underline{A}^i \cup \tilde{A}^S) = L_2.$$

Gemäß Lemma 8 genügt es also zu zeigen:

$$(2) \quad w_1(b) = w_2(b) \quad \text{für } b \in (V \cup \underline{A}^i \cup \tilde{A}^S)_\rho.$$

Aus (i) und der (A^i, A^S) - σ -Stetigkeit von $w_j|_{L_j}$ folgt:

$$w_1(b) = w_2(b) \quad \text{für } b \in V \cup \underline{A}^i \cup \widetilde{A}^S.$$

Da V und $\underline{A}^i$ nach unten ρ -geschlossen sind, bleibt also zu zeigen, daß für $a \in V$, $\underline{a} \in \underline{A}^i$, $\widetilde{a}_k \in \widetilde{A}^S$ ($1 \leq k \leq n$) die Gleichung $w_1(b) = w_2(b)$ in den folgenden Fällen gilt:

$$(\alpha) \quad b = a \wedge \underline{a} \wedge \widetilde{a}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{a}_n, \quad (\beta) \quad b = a \wedge \underline{a},$$

$$(\gamma) \quad b = a \wedge \widetilde{a}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{a}_n, \quad (\delta) \quad b = \underline{a} \wedge \widetilde{a}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{a}_n.$$

Seien $U \subset A^i$ bzw. $U_k \subset A^S$ nach unten bzw. oben gerichtete abzählbare Mengen mit

$$(3) \quad \underline{a} = \inf U \quad \text{und} \quad \widetilde{a}_k = \sup U_k \quad (1 \leq k \leq n).$$

Die Bewertungen $w_j|_{L_j}$ sind auf U_k nach oben beschränkt und (U, U_k) - σ -stetig, also gemäß Lemma 12, b) und c) auch $(U \wedge c, U_k \wedge c)$ - σ -stetig für alle $c \in L_j$. Somit folgt:

$$\begin{aligned} & w_j(a \wedge \underline{a} \wedge \widetilde{a}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{a}_n) \\ &= \sup \{ w_j(a \wedge \underline{a} \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_n) : u_k \in U_k \quad (1 \leq k \leq n) \} \\ &= \sup \{ \inf \{ w_j(a \wedge u \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_n) : u \in U \} : u_k \in U_k \quad (1 \leq k \leq n) \}. \end{aligned}$$

Wegen Voraussetzung (i) ist damit im Fall (α) die Gleichheit von $w_1(b)$ und $w_2(b)$ gezeigt. Entsprechend ergibt sie sich in den Fällen $(\beta) - (\delta)$.

2. Sei $\phi = \tau$. Analog zum Beweisteil 1. folgt:

$$L_j \restriction V^i := \rho(V \cup \underline{A}^i \cup \widetilde{A}^S) \quad \text{und} \quad w_1|_{V^i} = w_2|_{V^i},$$

d.h. ohne Einschränkung kann $A^i = \phi = A^S$ angenommen werden.

Damit ergibt sich die Behauptung aus Satz 13. □

1.5. Regularität

Von besonderem Interesse sind im folgenden diejenigen Bewertungen auf V , bzgl. denen jedes Element von V von unten bzw. oben durch Elemente aus A^i bzw. A^S approximiert werden kann.

DEFINITION 15.

Sei v eine isotone Abbildung von V nach $\tilde{\mathbb{R}}$. Dann heißt

$v|V$ " (A^i, A^S) -regulär", wenn

$$(i) \quad v(a) = \sup_{A^i \ni b \leq a} v(b) \quad \text{für alle } a \in V \quad (\sup \emptyset = -\infty),$$

$$(ii) \quad v(a) = \inf_{A^S \ni c \geq a} v(c) \quad \text{für alle } a \in V \quad (\inf \emptyset = +\infty).$$

Um ein Kriterium für die Regularität einer σ -Bewertung angeben zu können, werden zunächst zwei Lemmata bewiesen.

LEMMA 16.

Sei $v|V$ eine ρ -Bewertung und $A^i \subset V$ ein ρ -System. Für die

Restriktion von v auf $V_0 := \{ a \in V : v(a) = \sup_{A^i \ni b \leq a} v(b) \}$

gilt dann:

1. $v|V_0$ ist eine ρ -Bewertung;
2. $v|V_0$ ist eine σ -Bewertung, falls
 - a) $v|V$ eine σ -Bewertung ist und
 - B) $(A^i)_\sigma \cap V = A^i$.

Die duale Aussage gilt ebenfalls.

Beweis:

1. Mit Lemma 6 folgt, daß V_0 ein ρ -System und somit $v|V_0$ eine ρ -Bewertung ist.

2. a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge in V_0 mit $a := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \in V$.
Unmittelbar aus der σ -Stetigkeit von $v|V$ folgt dann

$$v(a) = \sup_{A^i \ni b \leq a} v(b).$$

- b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine antitone Folge in V_0 mit $a := \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \in V$.

Es ist zu zeigen, daß zu $\varepsilon > 0$ ein Element $\underline{b}$ existiert mit

$$(1) \quad a \geq \underline{b} \in A^i \quad \text{und} \quad v(a) - v(\underline{b}) \leq \varepsilon.$$

Seien $b_n \in A^i$ mit $b_n \leq a_n$ und $v(a_n) - v(b_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n}$.

Für $\underline{b}_n := b_1 \wedge \dots \wedge b_n$ gilt gemäß Lemma 6:

$$(2) \quad v(a_n) - v(\underline{b}_n) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aus (2) und der σ -Stetigkeit von $v|_V$ folgt:

$$(3) \quad \underline{b} := \inf_{n \in \mathbb{N}} \underline{b}_n \in V \quad \text{und} \quad v(a) - v(\underline{b}) \leq \varepsilon,$$

d.h. wegen der Voraussetzung 2.8) genügt $\underline{b}$ der Bedingung (1).

KOROLLAR 17.

Sind A^i und A^s ρ -Systeme mit

$$(A^i)_\sigma \cap V = A^i \quad \text{und} \quad (A^s)^\sigma \cap V = A^s,$$

so ist für jede σ -Bewertung $v|_V$ die Restriktion von v auf

$$V_1 := \{ a \in V : \sup_{A^i \ni b \leq a} v(b) = \inf_{A^s \ni c \geq a} v(c) \} \quad \text{eine } \sigma\text{-Bewertung.}$$

Bemerkung:

Falls A^i und A^s Teilmengen von V_1 sind, ist $v|_{V_1}$ (A^i, A^s) -regulär. Eine hinreichende Bedingung dafür liefert:

LEMMA 18.

Sei $v|_V$ eine σ -Bewertung und $A^i \subset V$ ein ρ -System mit

$$(A^i)_\sigma \cap V = A^i \quad \text{und} \quad A^s \subset \sigma(A^i).$$

Dann ist A^s in $V_0 = \{ a \in V : v(a) = \sup_{A^i \ni b \leq a} v(b) \}$ enthalten.

Die duale Aussage gilt ebenfalls.

Beweis:

Gemäß Lemma 16 ist $v|_{V_0}$ eine σ -Bewertung. Andererseits ist auch die Restriktion von v auf $\sigma(V_0) \cap V$ eine σ -Bewertung mit $V_0 \subset \sigma(V_0) \cap V \subset \sigma(V_0)$. Für die σ -Bewertungen $v|_{V_0}$ und $v|_{(\sigma(V_0) \cap V)}$ sind also die Voraussetzungen von Satz 13 erfüllt; folglich gilt: $\sigma(V_0) \cap V = V_0$.

Daraus ergibt sich mit der Voraussetzung $A^s \subset \sigma(A^i)$ und $A^i \subset V_0$:

$$A^s \subset \sigma(A^i) \cap V \subset \sigma(V_0) \cap V = V_0.$$

Das Hauptergebnis dieses Abschnittes enthält

SATZ 19.

A^i und A^s seien ρ -Systeme in V mit $V \subset \sigma(A^i) \cap \sigma(A^s)$.

Mit den Bezeichnungen $B^i := (A^i)_\sigma \cap V$ und $B^s := (A^s)_\sigma \cap V$ gilt

dann: Jede σ -Bewertung auf V ist (B^i, B^s) -regulär.

Beweis:

Sei $v|V$ eine σ -Bewertung. Mit A^i ist auch B^i ein ρ -System und es gilt $(B^i)_\sigma \cap V = B^i$, denn

$$((A^i)_\sigma \cap V)_\sigma \cap V \subset ((A^i)_\sigma)_\sigma \cap V = (A^i)_\sigma \cap V.$$

Wegen $V \subset \sigma(A^i) \subset \sigma(B^i)$ folgt aus Lemma 18:

$$V \subset \{ a \in V : v(a) = \sup_{B^i \ni b \leq a} v(b) \}.$$

$$\text{Dual ergibt sich: } V \subset \{ a \in V : v(a) = \inf_{B^s \ni c \leq a} v(c) \},$$

d.h. $v|V$ ist (B^i, B^s) -regulär.

§2. Fortsetzung von Bewertungen

2.1. Schwache Stetigkeit

Zunächst wird für Bewertungen der Begriff der "schwachen ϕ -Stetigkeit" eingeführt. Durch eine Verallgemeinerung des Daniell-Verfahrens (siehe [DL]) wird dann im Abschnitt 2.2 gezeigt, daß jede schwach ϕ -stetige Bewertung eine ϕ -stetige Fortsetzung besitzt.

Sei $v|V$ eine ρ -Bewertung, zu der eine (A^i, A^s) - τ -stetige Fortsetzung $w|L$ existiert, so daß also $V \subset L$ und $v(a) = w(a)$ für $a \in V$. Dann besitzt $v|V$ ebenfalls Stetigkeitseigenschaften. Insbesondere gilt für nicht-leere Mengen $C, D \subset V$ die Ungleichung

$$(*) \quad \inf_{c \in C} v(c) \leq \sup_{d \in D} v(d), \text{ falls}$$

a) C absteigend und D aufsteigend gerichtet ist mit $\inf C \leq \sup D$
und

b) eine der folgenden Bedingungen (1) - (3) erfüllt ist:

- (1) C und D abzählbar,
- (2) $C \subset A^i$ und $D \subset A^s$,
- (3) $C \subset A^i$ und D abzählbar (oder umgekehrt).

Der Fall (3) zeigt, daß die "schwache σ -Stetigkeit" von v auf V (Fall (1)) und die "schwache τ -Stetigkeit" von v bzgl. (A^i, A^s) (Fall (2)) nicht unabhängig voneinander sind. Eine für den Fortsetzungsprozeß geeignete Verträglichkeitsbedingung stellt die Bedingung (i) der folgenden Definition dar. Diese Bedingung garantiert ferner, daß man beim ersten Fortsetzungsschritt, nämlich bei der Hinzunahme der Grenzwerte von bestimmten absteigend bzw. aufsteigend gerichteten Teilmengen von V , ρ -Systeme $\underline{V}$ und $\overline{V}$ erhält (vgl. Definition 8 und Lemma 10).

DEFINITION 1.

Sei v eine Abbildung auf V . Dann heißt

$v|V$ "schwach (A^i, A^s) - φ -stetig", wenn v reellwertig ist

und die Ungleichung $\inf_{c \in C} v(c) \leq \sup_{d \in D} v(d)$

für alle Paare C, D von Teilmengen von V gilt, die den folgenden Bedingungen genügen:

- (i) $\emptyset \neq C \subset \rho(A^i \cup E)$ und $\emptyset \neq D \subset \rho(A^s \cup E)$

für eine geeignete Menge $E \subset V$ mit $|E| < \varphi$;

- (ii) $|C| \leq \varphi$ und $|D| \leq \varphi$;

- (iii) C absteigend und D aufsteigend gerichtet mit

$$\inf C \leq \sup D.$$

Bezeichnungen:

Es werden folgende Abkürzungen verwendet:

- 1. $A_E^i := \rho(A^i \cup E)$ und $A_E^s := \rho(A^s \cup E)$, falls $E \subset V$;

2.a) "schwach A - φ -stetig" statt "schwach (A, A) - φ -stetig",
falls $A^i = A = A^s$;

b) "schwach φ -stetig" statt "schwach V - φ -stetig".

Bemerkungen:

1. Schwach (A^i, A^s) - φ -stetige Abbildungen auf V sind stets
isoton.

2. Eine Abbildung auf V ist genau dann schwach σ -stetig,
wenn sie schwach $\emptyset$ - τ -stetig ist.

Wie das erste der nachstehenden Beispiele zeigt, ist es für die
Existenz einer (A^i, A^s) - τ -stetigen Fortsetzung von $v|_V$ nicht
hinreichend, daß $v|_V$ den folgenden Bedingungen genügt:

a) $v|_V$ ist schwach σ -stetig;

b) für nicht-leere Mengen C, D mit

$C \subset A^i$ absteigend und $D \subset A^s$ aufsteigend gerichtet gilt:

(α) $\inf_{c \in C} v(c) \leq \sup_{d \in D} v(d)$, falls $\inf C \leq \sup D$;

(β) $\inf_{c \in C} v(c) = v(\inf C)$, falls $\inf C \in A^i$;

$\sup_{d \in D} v(d) = v(\sup D)$, falls $\sup D \in A^s$.

Ebensowenig sind im Fall $\varphi = \sigma$ die entsprechenden Bedingungen für
die Existenz einer (A^i, A^s) - σ -stetigen Fortsetzung hinreichend,
wie das zweite Beispiel zeigt.

Beispiele:

1. Sei X ein kompakter Raum mit einem nicht $(F(X), \mathcal{O}(X))$ -
 τ -stetigen Borel-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ (siehe [HL], p.231, Ex.10).
Da $\mathcal{O}_0(X)$ eine Basis der Topologie $\mathcal{O}(X)$ bildet, ist μ
auch nicht $(F_0(X), \mathcal{O}_0(X))$ - τ -stetig (vgl. Satz 1.4), so daß
es wegen $(F_0(X))_\tau \subset \mathcal{L}(X)$ und $(\mathcal{O}_0(X))^\tau \subset \mathcal{L}(X)$ keine
 $(F_0(X), \mathcal{O}_0(X))$ - τ -stetige Fortsetzung von $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ gibt.

Mit $A^i := f_0^i(X)$ und $A^S := \mathcal{Q}_0(X)$ genügt $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ aber den vorstehenden Bedingungen a) und b), wobei a) trivialerweise erfüllt ist; b) ergibt sich folgendermaßen:

(α) Für $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset f_0^i(X)$ absteigend und $\emptyset \neq \mathcal{L} \subset \mathcal{Q}_0(X)$ aufsteigend gerichtet mit $\bigcap \mathcal{A} \subset \bigcup \mathcal{L}$ gilt:

$\mathcal{L} := \{ Z \cap \mathcal{CP} : Z \in \mathcal{A}, P \in \mathcal{L} \} \subset \mathcal{R}(X)$ absteigend gerichtet mit $\bigcap \mathcal{L} = \emptyset$, d.h. es gibt $Z_0 \in \mathcal{A}$, $P_0 \in \mathcal{L}$ mit $\mu(Z_0) \leq \mu(P_0)$.

(β) Das Baire-Maß $\mu|_{\mathcal{L}_0(X)}$ ist gemäß Satz 1.19 ($f_0^i(X), \mathcal{Q}_0(X)$)-regulär. Wegen $f_0^i(X) \subset \mathcal{R}(X)$ ergibt sich daraus b), (β).

2. Sei X der kompakte Raum $[0,1]$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ultrafilter, der $\{]0,t[: 0 < t < 1 \}$ enthält, und μ der zu $\mathcal{A} \cap \mathcal{L}(X)$ gehörige $\{0,1\}$ -wertige Inhalt auf $\mathcal{L}(X)$. Das ρ -System $A^S := \{ G \in \mathcal{Q}(X) : 0 \in G \text{ oder } U \cap G = \emptyset \text{ für eine Umgebung } U \text{ von } 0 \}$ ist eine Basis von $\mathcal{Q}(X)$. Mit $A^i := \{ F \in f(X) : CF \in A^S \}$ folgt wie im ersten Beispiel, daß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ der vorstehenden Bedingung b) genügt.

Dem Satz 1.4 entspricht

SATZ 2.

Eine schwach (A^i, A^S) - φ -stetige Abbildung auf V ist auch schwach $((A^i)_\varphi \cap V, (A^S)_\varphi \cap V)$ - φ -stetig.

Beweis:

Sei E eine Teilmenge von V mit $|E| < \varphi$ und $B^i = (A^i)_\varphi \cap V$.

Zu $a \in \rho(B^i \cup E)$ existiert $C_a \subset A_E^i$ mit

$$|C_a| \leq \varphi \text{ und } a = \inf C_a,$$

denn $B^i \cup E$ ist in dem ρ -System $(A_E^i)_\varphi$ enthalten. Es folgt, daß

zu $\emptyset \neq C \subset \rho(B^i \cup E)$ mit $|C| \leq \varphi$ eine Menge $C' \subset A_E^i$ existiert mit

$$(1) \quad |C'| \leq \varphi,$$

$$(2) \quad \inf C' = \inf C,$$

$$(3) \quad \text{zu } a' \in C' \text{ existiert } a \in C \text{ mit } a' \geq a.$$

Da auch die duale Aussage gilt, ergibt sich daraus die
Behauptung.

Mit dem folgenden Satz wird gezeigt, daß es zum Nachweis der
schwachen σ -Stetigkeit genügt, Paare C,D von Teilmengen von V
zu betrachten mit $\inf C = \sup D$.

SATZ 3.

Sei $v|V$ eine reellwertige Abbildung und sei $A \subset V$ ein ρ -System.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $v|V$ schwach A- σ -stetig.

(b) Für Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V mit

$\alpha) \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \rho(A \cup E)$

für eine geeignete endliche Menge $E \subset V$;

$\beta) (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ antiton, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ isoton;

$\gamma) \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$;

gilt: $\inf_{n \in \mathbb{N}} v(a_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} v(b_n)$.

Beweis:

Offenbar folgt Aussage (b) aus (a). Die Umkehrung ergibt sich
aus folgender Tatsache:

Zu einer antitonen Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und einer isotonen Folge
 $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in V mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} a_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$ existieren Folgen $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$

und $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ derart, daß

(1) $\{a'_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b'_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \rho(\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n : n \in \mathbb{N}\})$,

(2) $a'_n \geq a_n$ und $b'_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

(3) $\inf_{n \in \mathbb{N}} a'_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} b'_n$.

Geeignete Folgen $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erhält man durch
folgende rekursive Definition:

$a'_1 := a_1$, $b'_1 := b_1 \wedge a'_1$ und

$a'_n := a_n \vee b'_{n-1}$, $b'_n := b_n \wedge a'_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Offenbar sind die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so daß es genügt, Aussage (3) nachzuweisen.

(3.1) $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist antiton und $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ isoton,

denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a'_{n+1} &= a_{n+1} \vee (b_n \wedge a'_n) \leq a_{n+1} \wedge a'_n \\ &\leq a_n \wedge a'_n \leq a'_n \end{aligned} \quad (\text{wegen (2)}).$$

Analog folgt $b'_{n+1} \geq b'_n$.

Sei $a := \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$, $b := \sup_{n \in \mathbb{N}} b_n$ und

$a' := \inf_{n \in \mathbb{N}} a'_n$, $b' := \sup_{n \in \mathbb{N}} b'_n$. Dann gilt

(3.2) $a \leq b$ und $b' \leq b$.

Wegen (3.1) und $b'_n \leq a'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt:

(3.3) $b' \leq a'$.

Wegen (3.1) gilt ferner

$a' \leq a_n \vee b'$ und $b' \geq b_n \wedge a'$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

(3.4) $a' \leq a \vee b'$ und $b' \geq b \wedge a'$.

Aus (3.4) erhält man wegen (3.2)

(3.5) $a' \leq b$.

Diese Ungleichung in die zweite Ungleichung von (3.4) eingesetzt liefert

(3.6) $b' \geq a'$.

Wegen (3.3) ist damit die Behauptung (3) gezeigt. └

Bemerkung:

Der vorhergehende Beweis ist nicht auf Netze übertragbar. Zum Beispiel sei X ein vollständig regulärer Raum, der nicht normal ist. Es existieren also eine abgeschlossene Menge $F \subset X$ und eine offene Menge $G \subset X$, so daß F und $\mathbb{C}G$ nicht durch eine stetige Funktion getrennt werden können. Dann ist

$\mathcal{A} := \{f \in \mathcal{C}(X) : f \geq x_F\}$ eine absteigend gerichtete und
 $\mathcal{B} := \{f \in \mathcal{C}(X) : f \leq x_G\}$ eine aufsteigend gerichtete Teil-
menge von $\mathcal{C}(X)$ mit $\inf \mathcal{A} = x_F \leq x_G = \sup \mathcal{B}$.

Es existiert aber keine absteigend bzw. aufsteigend ge-
richtete Teilmenge $\mathcal{A}'$ bzw. $\mathcal{B}'$ von $\mathcal{C}(X)$ mit

$x_F \leq \inf \mathcal{A}' = \sup \mathcal{B}' \leq x_G$, denn andernfalls wäre $\inf \mathcal{A}' = \sup \mathcal{B}'$
eine nach unten und oben halbstetige, also stetige Funktion,
die F und G trennt.

In den Beweisen zu Satz 5 und Theorem 14 wird von dem folgenden
technischen Lemma Gebrauch gemacht.

LEMMA 4.

Zu einem ρ -System E in V und einer nicht-leeren Teilmenge C
von A_E^i mit $|C| \leq \varphi$ existieren (eventuell leere) Mengen
 $F \subset E$, $B \subset \rho(A^i)$, $B_e \subset \rho(A^i)$ ($e \in E$) mit $|B| \leq \varphi$ und $|B_e| \leq \varphi$
derart, daß¹⁾

- (a) $\inf C = \inf B \wedge \inf F \wedge \inf_{e \in E} (\inf B_e \vee e)$;
- (b) zu $b \in B \cup F$ bzw. $b_e \in B_e$ existiert $c \in C$ mit
 $c \leq b$ bzw. $c \leq b_e \vee e$.

Für eine nicht-leere Teilmenge D von A_E^s gilt die duale Aussage.

Beweis:

Ohne Einschränkung kann $A^i = \rho(A^i)$ angenommen werden.

1. Sei $\varphi = \sigma$. Es gilt

$A_E^i = \{ \inf_{1 \leq i \leq n} \sup_{1 \leq k \leq l} a_{ik} : n, l \in \mathbb{N} \text{ und } a_{ik} \in A^i \cup E \}$. Da A^i und E

ρ -Systeme sind, existiert also zu C eine abzählbare Menge

$C' \subset A^i \cup E \cup \{a \vee e : a \in A^i, e \in E\}$ derart, daß

- (a') $\inf C = \inf C'$,
- (b') zu $c' \in C'$ existiert $c \in C$ mit $c \leq c'$.

¹⁾ Es wird $\inf \emptyset = 1$ und $\sup \emptyset = 0$ gesetzt.

Da C' eine abzählbare Teilmenge von $A^i \cup E \cup \bigcup_{e \in E} (A^i \vee e)$ ist, existieren abzählbare (eventuell leere) Mengen

$B \subset A^i, F \subset E, B_e \subset A^i \ (e \in E)$ mit

$$C' = B \cup E \cup \bigcup_{e \in E} (B_e \vee e).$$

Wegen (a') und (b') gilt für $B, F, B_e \ (e \in E)$ die Behauptung.

2. Im Fall $\varphi = \tau$ folgt die Behauptung analog. |

Eine σ -Bewertung $v|V$, die der Bedingung

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \inf_{c \in C} v(c) \leq \sup_{d \in D} v(d) \quad \text{für alle Paare } C, D \text{ mit} \\ C \subset \rho(A^i) \text{ absteigend gerichtet, } D \subset \rho(A^S) \text{ aufsteigend} \\ \text{gerichtet und } \inf C \leq \sup D \end{array} \right.$$

genügt, ist nicht notwendig schwach (A^i, A^S) - τ -stetig, denn beispielsweise genügt jedes Borel-Maß auf einem kompakten Raum X mit $A^i := f(X)$ und $A^S := g(X)$ dieser Bedingung; aber es gibt kompakte Räume, die ein nicht $(f(X), g(X))$ - τ -stetiges Borel-Maß zulassen (siehe erstes Beispiel zu Definition 1).

Im Fall $\varphi = \sigma$ ist die entsprechende Bedingung für die schwache (A^i, A^S) - σ -Stetigkeit ebenfalls nicht hinreichend (siehe zweites Beispiel zu Definition 1).

Unter einer zusätzlichen Voraussetzung stellt die Bedingung $(*)$ jedoch ein Kriterium für die schwache τ -Stetigkeit dar.

Satz 5.

Für eine (A^i, A^S) -reguläre ρ -Bewertung sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) $v|V$ schwach (A^i, A^S) - φ -stetig.

(b) Für alle Paare C, D mit

(i) $C \subset \rho(A^i), D \subset \rho(A^S);$

(ii) $|C| \leq \varphi, |D| \leq \varphi;$

(iii) C absteigend, D aufsteigend gerichtet und

$$\inf C \leq \sup D;$$

$$\text{gilt: } \inf_{c \in C} v(c) \leq \sup_{d \in D} v(d).$$

Beweis:

Sei C, D ein Paar, das den Bedingungen (i) - (iii) der Definition 1 genügt. Insbesondere gilt also

$$CC A_E^i \text{ und } DC A_D^S \text{ für eine Menge } E = \{e_n : n \in N\} \subset V,$$

wobei N eine endliche bzw. abzählbare Teilmenge von M ist.

Zu C bzw. D existieren gemäß Lemma 4 Mengen M ⊂ N und

$B, B_n \subset \rho(A^i)$ bzw. $M' \subset N$ und $B', B'_n \subset \rho(A^S)$ derart, daß insbesondere

$$(1) \quad \inf C = \inf B \wedge \inf_{n \in M} e_n \wedge \inf_{n \in N} (\inf B_n \vee e_n);$$

$$(2) \quad \sup D = \sup B' \vee \sup_{n \in M'} e_n \vee \sup_{n \in N} (\sup B'_n \wedge e_n).$$

Da $v|V(A^i, A^S)$ -regulär ist, existieren zu $\varepsilon > 0$ Elemente

$$\underline{e}_n \in A^i \text{ und } \bar{e}_n \in A^S \text{ mit}$$

$$(3) \quad \underline{e}_n \leq e_n \leq \bar{e}_n \text{ und } v(\bar{e}_n) - v(\underline{e}_n) < 2^{-n} \cdot \varepsilon \text{ für } n \in N.$$

Nach Voraussetzung existieren zu $\varepsilon > 0$ ferner endliche Mengen

$$N_0 \subset N, M_0 \subset M, B_0 \subset B, B_{0,n} \subset B_n \text{ und}$$

$$M'_0 \subset M', B'_0 \subset B', B'_{0,n} \subset B'_n \text{ derart, daß}$$

$$(4) \quad \begin{cases} v(\inf B_0 \wedge \inf_{n \in M_0} e_n \wedge \inf_{n \in N_0} (\inf B_{0,n} \vee e_n)) \\ \leq v(\sup B'_0 \vee \sup_{n \in M'_0} \bar{e}_n \vee \sup_{n \in N_0} (\sup B'_{0,n} \wedge \bar{e}_n)) + \varepsilon. \end{cases}$$

Mit Aussage (b) in Lemma 4 und mehrfacher Anwendung von

Lemma 1.6 folgt

$$(5) \quad \begin{cases} \inf_{c \in C} v(c) \leq v(\inf B_0 \wedge \inf_{n \in M_0} e_n \wedge \inf_{n \in N_0} (\inf B_{0,n} \vee e_n)) \\ \leq v(\inf B_0 \wedge \inf_{n \in M_0} e_n \wedge \inf_{n \in N_0} (\inf B_{0,n} \vee e_n)) + 2\varepsilon. \end{cases}$$

Mit (4), (5) und der zu (5) analogen Aussage für D ergibt sich:

$$\inf_{c \in C} v(c) \leq \sup_{d \in D} v(d) + 5\varepsilon.$$

Der vorhergehende Satz gibt auch eine hinreichende (und notwendige) Bedingung für die schwache σ -Stetigkeit auf ganz V an, denn es gilt

SATZ 6.

Jede (A^i, A^s) -reguläre und schwach (A^i, A^s) - σ -stetige ρ -Bewertung auf V ist schwach σ -stetig.

Beweis:

Die Behauptung ergibt sich mittels üblicher $\varepsilon \cdot 2^{-n}$ -Approximation und Lemma 1.6.

2.2. Existenz und Eindeutigkeit der Fortsetzung

In diesem Abschnitt werden zusätzlich die folgenden Bezeichnungen verwendet.

Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{A^i, \varphi} &:= \{C : C \subset A_E^i \text{ absteigend gerichtet, } |C| \leq \varphi, E \subset V, |E| < \varphi\}; \\ \mathcal{D}_{A^s, \varphi} &:= \{D : D \subset A_E^s \text{ aufsteigend gerichtet, } |D| \leq \varphi, E \subset V, |E| < \varphi\}. \end{aligned}$$

Die Definition 8, Lemma 10 und Lemma 11 enthalten den wesentlichen Teil des Fortsetzungsprozesses.

LEMMA 7.

Sei $v|_V$ eine schwach (A^i, A^s) - φ -stetige Abbildung. Dann gilt

- $\inf_{c \in C} v(c) \leq \inf_{c' \in C'} v(c')$ für $C, C' \in \mathcal{L}_{A^i, \varphi}$ mit $\inf C \leq \inf C'$;
- $\sup_{d \in D} v(d) \leq \sup_{d' \in D'} v(d')$ für $D, D' \in \mathcal{D}_{A^s, \varphi}$ mit $\sup D \leq \sup D'$.

Beweis:

Wegen $a \in A_{\{a\}}^s$ für $a \in V$ folgt aus der schwachen φ -Stetigkeit:

$$\inf_{c \in C} v(c) \leq v(a) \quad \text{für jedes } a \in V \text{ mit } \inf C \leq a,$$

also insbesondere

$$a) \quad \inf_{c \in C} v(c) \leq v(c') \quad \text{für jedes } c' \in C'.$$

Analog ergibt sich die duale Aussage b).

Im ersten Fortsetzungsschritt wird der Definitionsbereich von v auf die Infima bzw. Suprema der gerichteten Mengen aus $\mathcal{L}_{A^i, \varphi}^i$ bzw. $\mathcal{J}_{A^s, \varphi}^s$ ausgedehnt.

DEFINITION 8.

Für eine schwach (A^i, A^s) - φ -stetige Abbildung $v|V$ sei

- a) $\underline{v} := \{ \inf C : C \in \mathcal{L}_{A^i, \varphi}^i \}$ und
 $\underline{v}(\underline{a}) := \inf_{c \in C} v(c)$ für $\underline{a} = \inf C$ mit $C \in \mathcal{L}_{A^i, \varphi}^i$;
- b) $\overline{v} := \{ \sup D : D \in \mathcal{J}_{A^s, \varphi}^s \}$ und
 $\overline{v}(\overline{a}) := \sup_{d \in D} v(d)$ für $\overline{a} = \sup D$ mit $D \in \mathcal{J}_{A^s, \varphi}^s$.

Bemerkung:

Gemäß Lemma 7 sind $\underline{v}$ und $\overline{v}$ eindeutig definiert.

Eine weitere Konsequenz aus Lemma 7 ist

LEMMA 9.

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 8

- gilt: $\underline{v}(a) = v^*(a)$ für $a \in \underline{v}$,
 $\overline{v}(a) = v_*(a)$ für $a \in \overline{v}$.

Die Abbildungen $\underline{v}|\underline{v}$ und $\overline{v}|\overline{v}$ besitzen folgende Eigenschaften:

LEMMA 10.

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 8

gilt:

- (0) $\underline{v}$ und $\overline{v}$ ρ -Systeme;
- (1) $v \in \underline{v} \cap \overline{v}$ und $\underline{v}(a) = v(a) = \overline{v}(a)$ für $a \in v$;
- (2) $\underline{v} : \underline{v} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ und $\overline{v} : \overline{v} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ isoton;
- (3) $\underline{v}|\underline{v}$ und $\overline{v}|\overline{v}$ ober- bzw. unteradditiv, falls
 $v|v$ ober- bzw. unteradditiv;
- (4) $\underline{v}|\underline{v}$ bzgl. A_E^i nach unten φ -stetig für $E \subset V$ mit $|E| < \varphi$,
 $\overline{v}|\overline{v}$ bzgl. A_E^s nach oben φ -stetig für $E \subset V$ mit $|E| < \varphi$.

Beweis:

Die Behauptung wird jeweils für $\underline{V}$ bzw. $\underline{v}|\underline{V}$ gezeigt.

(0): Für $C_i \in \mathcal{L}_{A^i, \varphi}$ ($i=1,2$) gilt

$$\underline{C} := \{ c_1 \wedge c_2 : c_i \in C_i \} \in \mathcal{L}_{A^i, \varphi},$$

$$\overline{C} := \{ c_1 \vee c_2 : c_i \in C_i \} \in \mathcal{L}_{A^i, \varphi}.$$

Damit folgt

$$\alpha) \inf C_1 \wedge \inf C_2 = \inf \underline{C} \in \underline{V},$$

und wegen der φ -Distributivität

$$\beta) \inf C_1 \vee \inf C_2 = \inf \overline{C} \in \underline{V}.$$

(1): trivial.

(2): $\underline{v}|\underline{V}$ ist gemäß Lemma 7 isoton.

(3): Sei $\underline{v}|\underline{V}$ oberadditiv. Mit den Bezeichnungen von Beweis-
teil (0) gilt wegen (2):

$$v(\underline{C}) + v(\overline{C}) \geq \underline{v}(\inf C_1) + \underline{v}(\inf C_2) \quad \text{für alle } \underline{C} \in \underline{C}, \overline{C} \in \overline{C}.$$

Somit ist auch $\underline{v}|\underline{V}$ oberadditiv.

Falls $\underline{v}|\underline{V}$ unteradditiv ist, folgt die Behauptung analog.

(4): Für eine absteigend gerichtete Menge $U \subset A_E^i$ mit $|U| \leq \varphi$
gilt $U \in \mathcal{L}_{A^i, \varphi}$, also wegen (1):

$$\inf U \in \underline{V} \quad \text{und} \quad \underline{v}(\inf U) = \inf_{u \in U} \underline{v}(u).$$

Im Fall $\varphi = \tau$ bleibt zu zeigen, daß $\underline{v}|\underline{V}$ nach unten σ -stetig
ist. Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine antitone Folge in $\underline{V}$. Es existieren

also $C_n \in \mathcal{L}_{A^i, \tau}$ und abzählbare Mengen $E_n \subset V$ mit

$$\alpha) \underline{c}_n = \inf C_n \quad \text{und} \quad C_n \subset A_{E_n}^i \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Menge $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subset V$ ist abzählbar mit

$$\beta) C := \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right)_\rho \subset A_E^i, \quad \text{d.h. } C \in \mathcal{L}_{A^i, \tau}.$$

Es folgt:

$$\gamma) \underline{c} := \inf_{n \in \mathbb{N}} \underline{c}_n = \inf C \in \underline{V}.$$

Da zu jedem $c \in C$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $c \geq \underline{c}_n$, ergibt sich aus (1) und (2) außerdem:

$$\delta) \quad \underline{v}(\underline{c}) = \inf_{c \in C} v(c) \geq \inf_{n \in \mathbb{N}} v(\underline{c}_n) \geq \underline{v}(\underline{c}).$$

Für eine oberadditive und schwach σ -stetige Abbildung $v|V$ hat $\underline{v}|V$ also die Eigenschaften eines "unteren Halbintegrals" (vgl. [AN], p.427). Entsprechendes gilt für $\underline{v}_*|W$:

LEMMA 11.

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Definition 8 gilt:

- (0') $\underline{v}_*(a) \leq \overline{v}^*(a)$ für $a \in W$;
- (1') $\underline{v}_*(a) = \overline{v}^*(a)$ für $a \in \underline{V} \cup \overline{V}$;
- (2') $\underline{v}_*: W \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ und $\overline{v}^*: W \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ isoton;
- (3') $\underline{v}_*|W$ oberadditiv, falls $v|V$ oberadditiv,
 $\overline{v}^*|W$ unteradditiv, falls $v|V$ unteradditiv;
- (4') $\underline{v}_*|W$ bzgl. A_E^i nach unten φ -stetig für $E \subset V$ mit $|E| < \varphi$,
falls $v|V$ oberadditiv,
 $\overline{v}^*|W$ bzgl. A_E^s nach oben φ -stetig für $E \subset V$ mit $|E| < \varphi$,
falls $v|V$ unteradditiv.

Beweis:

(0'): Die Behauptung folgt aus der schwachen φ -Stetigkeit von $v|V$.

(1'): Sei etwa $a \in \underline{V}$. Wegen (0') genügt es zu zeigen: $\underline{v}_*(a) \geq \overline{v}^*(a)$.

$$\begin{aligned} \underline{v}_*(a) &= \underline{v}(a) && \text{(wegen (2))} \\ &= v^*(a) && \text{(Lemma 9)} \\ &\geq \overline{v}^*(a) && \text{(wegen (1)).} \end{aligned}$$

(2') und (3'): Gemäß (2) und (3) ist $\underline{v}|V$ bzw. $\overline{v}|V$ isoton und oberadditiv bzw. isoton und unteradditiv. Mittels Lemma 1.10, (α) ergeben sich daraus die entsprechenden Eigenschaften von $\underline{v}_*|W$ bzw. $\overline{v}^*|W$.

(4): Wegen (2) und (4) ist nur zu zeigen, daß im Fall $\varphi=\tau$ die Abbildung $\underline{v}_w|W$ bzw. $\overline{v}_w|W$ nach unten bzw. oben σ -stetig ist. Wegen (3) und (4) folgt daher die Behauptung aus Lemma 1.10, (β).

Für den Beweis von Theorem 14 wird ein weiteres Lemma benötigt.

LEMMA 12.

Sei LCW ein ρ -System mit $V \subset L$ und $w|L$ eine ρ -Bewertung.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (α) $w|L$ ist (A_E^i, A_E^s) - φ -stetig für alle $E \subset L$ mit $|E| < \varphi$;
- (β) $w|L$ ist $(A_{\{e\}}^i, A_{\{e\}}^s)$ - φ -stetig für alle $e \in L$.

Beweis:

Der Beweis wird für $\varphi=\tau$ durchgeführt, da dieser den Beweis für $\varphi=\sigma$ enthält.

Sei U eine nicht-leere, absteigend gerichtete Teilmenge von A_E^i

mit $\gamma := \inf_{u \in U} v(u) \in \mathbb{R}$. Ohne Einschränkung kann angenommen werden,

daß E ein ρ -System ist. Gemäß Lemma 4 existieren also Mengen

$F \subset E$ und $B, B_e \subset \rho(A^i)$ ($e \in E$) derart, daß

- (a) $\inf U = \inf B \wedge \inf F \wedge \inf_{e \in E} (\inf B_e \vee e)$;
- (b) zu $b \in B \cup F$ bzw. $b_e \in B_e$ existiert $u \in U$ mit $u \leq b$ bzw. $u \leq b_e \vee e$.

Da $w|L$ bzgl. $\rho(A^i)$ nach unten τ -stetig ist, gilt

- (c) $\inf B \in L$, $\inf F \in L$ mit

$$w(\inf B) = \inf_{b \in B} w(b) \quad \text{und} \quad w(\inf F) = \inf_{f \in F} w(f).$$

Wegen (b) und Lemma 1.6 genügt es also zu zeigen:

- (d) $\underline{a} := \inf_{e \in E} (\inf B_e \vee e) \in L$ mit $w(\underline{a}) = \inf_{u \in U} w(u)$,
wobei $U_E := (\{b_e \vee e : b_e \in B, e \in E\})_\rho$.

Gemäß Voraussetzung (β) gilt

$$(e) \quad \underline{b}_e := \inf_{b_e \in B_e} b_e \vee e = \inf_{b_e \in B_e} (b_e \vee e) \in L \quad \text{mit}$$

$$w(\underline{b}_e) = \inf_{b_e \in (B_e)_\rho} w(b_e \vee e) .$$

Mit Lemma 1.6 folgt:

$$(f) \quad \inf_{e \in E_0} \underline{b}_e \in L \quad \text{für endliche Mengen } E_0 \subset E \text{ mit}$$

$$w(\inf_{e \in E_0} \underline{b}_e) = \inf_{u \in U_{E_0}} w(u) \geq \gamma ,$$

$$\text{wobei } U_{E_0} := (\{ b_e \vee e : b_e \in B_e, e \in E_0 \})_\rho .$$

Daraus ergibt sich mit der σ -Stetigkeit von $w|L$ die Behauptung (d). └

Bemerkung:

Ist $w|L$ eine für alle endlichen Teilmengen E von L

(A_E^i, A_E^S) - τ -stetige σ -Bewertung, so gilt:

$$(*) \quad L \supset \{ \langle \underline{a}, a, \bar{a} \rangle : a \in \sigma((A^i)_\tau \cup (A^S)^\tau) \} \quad \text{für } \underline{a}, \bar{a} \in L,$$

denn $\{ a \in W : \langle \underline{a}, a, \bar{a} \rangle \in L \}$ ist ein $(A^i)_\tau \cup (A^S)^\tau$ umfassendes σ -System. Eine (A^i, A^S) - τ -stetige σ -Bewertung genügt nicht notwendig der Bedingung $(*)$ (siehe Beispiel zu Lemma 1.12).

Im Fall $\varphi = \sigma$ gilt die analoge Aussage.

Bei der Konstruktion der Fortsetzung sind die folgenden Mengen von Bedeutung.

DEFINITION 13.

Mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Definition 8 sei

$$\underline{V} := \{ \underline{a} \in \underline{V} : \underline{v}(\underline{a}) > -\infty \}, \quad \tilde{V} := \{ \bar{a} \in \tilde{V} : \bar{v}(\bar{a}) < +\infty \};$$

$$\underline{A}_E^i := (A_E^i)_\varphi \cap \underline{V}, \quad \tilde{A}_E^S := (A_E^S)^\varphi \cap \tilde{V} \quad \text{für } E \subset V \text{ mit } |E| < \varphi;$$

$$\underline{A}^i := (A^i)_\varphi \cap \underline{V}, \quad \tilde{A}^S := (A^S)^\varphi \cap \tilde{V} .$$

Bemerkung:

Gemäß Lemma 9 gilt:

$$\underline{A}^i = \{ a \in (A^i)_\varphi : v_\star(a) > -\infty \}, \quad \tilde{A}^S = \{ a \in (A^S)^\varphi : v_\star(a) < +\infty \} .$$

Daher sind die Bezeichnungen mit denen aus Theorem 1.14 konsistent.

Das folgende Theorem wurde im Fall einer schwach σ -stetigen Bewertung $v|V$ von Alfson bewiesen (siehe [AN], Th.5 und Th.7).

THEOREM 14.

Zu einer schwach (A^i, A^s) - φ -stetigen ρ -Bewertung $v|V$ existiert genau eine ρ -Bewertung $w|L$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $V \subset L \subset \psi(\underline{V} \cup \tilde{V})$, wobei $\psi := \varphi - 1$;
- (ii) $w(a) = v(a)$ für alle $a \in V$;
- (iii) $w|L$ (A^i_E, A^s_E) - φ -stetig für alle $E \subset L$ mit $|E| < \varphi$.

Beweis:

1. Eindeutigkeit. Sind $w_j|L_j$ ($j=1,2$) ρ -Bewertungen mit den Eigenschaften (i) - (iii), so ist für jede Menge $E \subset V$ mit $|E| < \varphi$ die Restriktion von w_j auf

$$L_{j,E} := L_j \cap \psi(V \cup \underline{A}^i_E \cup \tilde{A}^s_E)$$

(A^i_E, A^s_E) - φ -stetig. Wegen $V \subset L_{j,E}$ folgt aus Theorem 1.14:

$$L_{1,E} = L_{2,E} \quad \text{und} \quad w_1|L_{1,E} = w_2|L_{2,E},$$

also wegen $L_j = \bigcup \{ L_{j,E} : E \subset V, |E| < \varphi \}$:

$$L_1 = L_2 \quad \text{und} \quad w_1|L_1 = w_2|L_2.$$

2. Existenz. Die Abbildung $w|L$ mit

$$L := \{ b \in \psi(\underline{V} \cup \tilde{V}) : -\infty < \underline{v}_\infty(b) = \overline{v}^\infty(b) < +\infty \},$$

$$w(b) := \underline{v}_\infty(b) \quad \text{für } b \in L,$$

besitzt die geforderten Eigenschaften, denn es gilt:

$$(1^a) \quad V \subset \underline{V} \cup \tilde{V} \subset L \subset \psi(\underline{V} \cup \tilde{V}) \quad \text{und}$$

$$w(a) = v(a) \quad \text{für } a \in V \quad (\text{wegen (1) und (1')});$$

$$(2^a) \quad w : L \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{isoton} \quad (\text{wegen (2')});$$

$$(3^a) \quad L \text{ } \rho\text{-System in } W \text{ und } w|L \text{ additiv,}$$

da für alle $b_1, b_2 \in L$ die folgenden Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \underline{v}^*(b_1) + \underline{v}^*(b_2) &\leq \underline{v}^*(b_1 \vee b_2) + \underline{v}^*(b_1 \wedge b_2) && \text{(wegen (3'))} \\ &\leq \overline{v}^*(b_1 \vee b_2) + \overline{v}^*(b_1 \wedge b_2) && \text{(wegen (0'))} \\ &\leq \overline{v}^*(b_1) + \overline{v}^*(b_2) && \text{(wegen (3'))}; \end{aligned}$$

(4^W) $w|L$ (A_E^i, A_E^S) - φ -stetig für $E \subset L$ mit $|E| < \varphi$.

Gemäß Lemma 12 kann angenommen werden, daß E einelementig ist. Es wird gezeigt, daß im Fall $\varphi = \tau$ die Abbildung $w|L$ für jedes $e \in L$ bzgl. $A_{\{e\}}^i$ nach unten τ -stetig ist. In den übrigen Fällen folgt die Behauptung analog, wobei für $\varphi = \sigma$ der Teil α) unnötig ist.

α) $w|L$ ist bzgl. L nach unten σ -stetig,

denn für eine antitone Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in L mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} w(b_n) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{gilt: } \overline{v}^*(\inf_{n \in \mathbb{N}} b_n) &\leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \overline{v}^*(b_n) && \text{(wegen (2'))} \\ &= \inf_{n \in \mathbb{N}} \underline{v}^*(b_n) \\ &= \underline{v}^*(\inf_{n \in \mathbb{N}} b_n) && \text{(wegen (4'))}. \end{aligned}$$

β) $w|L$ ist für $E \subset V$ mit $|E| \leq \sigma$ bzgl. A_E^i nach unten τ -stetig, denn wegen $A_E^i \subset V$ folgt β) aus (4).

γ) $w|L$ ist für $e \in \underline{V}$ bzgl. $A_{\{e\}}^i$ nach unten τ -stetig, denn zu e existiert eine abzählbare Teilmenge F von V mit $A_{\{e\}}^i \subset (A_E^i)_\tau$, so daß sich γ) aus β) und Satz 1.4 ergibt.

δ) $w|L$ ist für $e \in L$ bzgl. $\rho(A^i) \vee e$ nach unten τ -stetig, denn zu e existiert $\underline{e} \in \underline{V}$ mit $e \geq \underline{e}$ und $w|L$ ist wegen γ) bzgl. $\rho(A^i) \vee \underline{e}$ nach unten τ -stetig und auf $\rho(A^i) \vee \underline{e}$ nach unten beschränkt. Damit folgt δ) aus Lemma 1.12,c).

ϵ) $w|L$ ist für $e \in L$ bzgl. $A_{\{e\}}^i$ nach unten τ -stetig, denn ist C eine Teilmenge von $A_{\{e\}}^i$ mit $\inf_{c \in C_p} w(c) > -\infty$, so

kann ohne Einschränkung angenommen werden:

$$C \subset (\rho(A^i) \cup \{e\})^0 = \rho(A^i) \cup \{e\} \cup \{a \vee e : a \in \rho(A^i)\}.$$

Damit folgt aus δ) und Lemma 1.6:

$$\inf C \in L \quad \text{und} \quad w(\inf C) = \inf_{c \in C_p} w(c)$$

2.3. Folgerungen und Bemerkungen

Dem klassischen Fall entspricht die Fortsetzung einer schwach σ -stetigen ρ -Bewertung zu einer σ -Bewertung. Die Behauptung des nachstehenden Korollars ergibt sich durch Anwendung von Theorem 14 auf die schwach ϕ - τ -stetige Bewertung $v|V$.

KOROLLAR 15.

Zu einer schwach σ -stetigen ρ -Bewertung $v|V$ existiert genau eine σ -Bewertung $w|L$ mit

- (i) $V \subset L \subset \sigma(V)$;
- (ii) $w(a) = v(a)$ für $a \in V$.

Bemerkungen:

1. $v|V$ ist notwendig schwach (A^i, A^s) - ϕ -stetig, falls es eine Fortsetzung $w|L$ von $v|V$ gibt mit

$$(*) \quad w|L \text{ } (A_E^i, A_E^s)\text{-}\phi\text{-stetig für alle } E \subset V \text{ mit } |E| < \phi.$$

Eine (A^i, A^s) - ϕ -stetige ρ -Bewertung $w|L$ mit $V \subset L$ besitzt im allgemeinen nicht die Stetigkeitseigenschaft $(*)$ (vgl.

Beispiel nach Lemma 1.12). Offenbar ist dies jedoch der Fall, wenn $A^i = \emptyset = A^s$ oder $A^i = V = A^s$ gilt.

Darüber hinaus genügt eine (A^i, A^s) - ϕ -stetige Bewertung der Bedingung $(*)$, wenn A^i und A^s ρ -Systeme sind und $v|V$ entweder beschränkt oder (A^i, A^s) -regulär ist.

2. Mit dem in Abschnitt 2.2 angegebenen Verfahren (mit $L^1 := \{a \in W : -\infty < \underline{v}_*(a) = \overline{v}^*(a) < +\infty\}$ statt L) erhält man auch eine kleinste "vollständige" Fortsetzung $w^1|L^1$, d.h. L^1 enthält ein Element $a \in W$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ Elemente $\underline{a}, \bar{a} \in L^1$ existieren mit $\underline{a} \leq a \leq \bar{a}$ und $w(\bar{a}) - w(\underline{a}) < \epsilon$. $w^1|L^1$ ergibt sich jedoch auch durch Vervollständigung von $w|L$.

3. Eine für die Eindeutigkeit der Fortsetzung wesentliche Bedingung ist " $L \subset \psi(\underline{V} \cup \tilde{V})$ ". Fordert man statt dessen nur " $L \subset \psi(\underline{V} \cup \bar{V})$ ", so ist die Fortsetzung nicht mehr durch ihre Stetigkeitseigenschaften eindeutig bestimmt, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel:

Es bezeichne X_1 bzw. X_2 die reellen Zahlen mit der gewöhnlichen bzw. mit der diskreten Topologie und $X := X_1 \times X_2$ den Produktraum. Sei W der Verband $\mathbb{R}^X$ und V das ρ -System $\mathcal{K}(X)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger. Für jede Funktion $f \in V$ sind dann die Schnittfunktionen $f_{x_2} : x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ bis auf endlich viele $x_2 \in X$ identisch null. Durch

$$v(f) := \bigwedge_{x_2 \in X_2} \int_{X_1} f_{x_2}(x_1) dx_1 \quad \text{für } f \in V$$

wird also eine Bewertung $v|V$ definiert. Aus den Stetigkeitseigenschaften des Lebesgue-Integrals folgt

$$\inf v(f) = 0 \quad \text{für } F \subset V \text{ absteigend gerichtet mit } \inf F = 0, \quad f \in F$$

woraus sich mittels der Linearität von $v|V$ die schwache τ -Stetigkeit von $v|V$ ergibt. Ist $f \in \tilde{V}$; so gilt für die

Schnittfunktionen $f_{x_2}, x_2 \in X_2$:

$$(1) f_{x_2}^- := -(f_{x_2} \wedge 0) = 0 \quad \text{bis auf endlich viele } x_2 \in X_2;$$

$$(2) f_{x_2}^+ := (f_{x_2} \vee 0) = 0 \quad \text{bis auf abzählbar viele } x_2 \in X_2,$$

$$\text{denn es ist } \int_{X_1} f_{x_2}^+(x_1) dx_1 > 0 \quad \text{für } f_{x_2}^+ \not\equiv 0.$$

Da für $f \in \underline{V}$ die analoge Aussage gilt, ergibt sich für den Definitionsbereich der Fortsetzung $w|L$ von $v|V$ gemäß Theorem 14:

$$L \subset \sigma(V).$$

Sei $g \in W$ die Funktion mit

$$g(0, x_2) = 1 \quad \text{für } x_2 \in X_2 \quad \text{und} \quad g(x_1, x_2) = 0 \quad \text{sonst.}$$

Für jedes $\gamma > 0$ ist dann $w|L^\gamma$ mit

$$L^\gamma := \sigma(L \cup \{g\}) \quad \text{und}$$

$$w(f) := \begin{cases} w(f) & \text{für } f \in L, \\ \gamma & \text{für } f \in L^\gamma \setminus L, \end{cases}$$

eine von $w|L$ verschiedene (V, V) - τ -stetige Fortsetzung von $v|V$ mit $L^\gamma \subset \sigma(V \cup \bar{V})$.

Für Aussagen über die Regularitätseigenschaften der Fortsetzung $w|L$ gemäß Theorem 14 wird benötigt

LEMMA 16.

Sei $v|V$ eine schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetige ρ -Bewertung und

$\underline{B} \subset \underline{V}$ bzw. $\tilde{B} \subset \tilde{V}$ nach unten bzw. oben ρ -geschlossen. Für

$\psi := \phi^{-1}$ existiert dann höchstens eine ρ -Bewertung $w|L$ mit

$$(i) \quad V \cup \underline{B} \cup \tilde{B} \subset L \subset \psi(V \cup \underline{B} \cup \tilde{B});$$

$$(ii) \quad w(a) = v(a) \quad \text{für } a \in V;$$

$$(iii) \quad w|L \text{ } (\underline{B}, \tilde{B})\text{-regulär}.$$

Beweis:

Sind $w_i|L_i$ ($i=1,2$) ψ -Bewertungen mit den Eigenschaften

(i) - (iii), so gilt:

$$(\alpha) \quad w_1(\underline{b}) = w_2(\underline{b}) \quad \text{für } \underline{b} \in \underline{B}.$$

Aus der schwachen ϕ -Stetigkeit von $v|V$ und $\underline{B} \subset \underline{V}$, $\tilde{B} \subset \tilde{V}$ ergibt sich nämlich für $\underline{b} \in \underline{B}$, $\tilde{b} \in \tilde{B}$ mit $\underline{b} \leq \tilde{b}$ und $i, j \in \{1,2\}$:

$$\begin{aligned} w_i(\underline{b}) &\leq \inf\{v(a) : v \ni a \geq \underline{b}\} && (\text{wegen (ii)}) \\ &\leq \sup\{v(a) : v \ni a \leq \tilde{b}\} \\ &\leq w_j(\tilde{b}) && (\text{wegen (ii)}). \end{aligned}$$

Daraus folgt wegen (iii):

$$w_1(\underline{b}) = \inf\{w_1(\tilde{b}) : \tilde{b} \ni \tilde{b} \geq \underline{b}\} \geq w_j(\underline{b}) \quad \text{für } \underline{b} \in \underline{B},$$

womit (α) gezeigt ist. Aus (α) und (iii) folgt

$$(\beta) \quad w_1|L_1 \cap L_2 = w_2|L_1 \cap L_2.$$

Im Fall $\varphi = \tau$ bleibt also zu zeigen:

$$(\gamma) \quad L_1 = L_2.$$

Wegen (i) und (β) gilt für $V^A := \rho(V \cup B \cup \tilde{B})$:

$$V^A \subset L_j \subset \sigma(V^A) \quad \text{und} \quad w_1(a) = w_2(a) \quad \text{für } a \in V^A.$$

Damit ergibt sich (γ) aus Satz 1.13.

Die Fortsetzung $w|L$ gemäß Theorem 14 ist $(\underline{V}, \tilde{V})$ -regulär; dies folgt sofort aus der Konstruktion. Somit erhält man

SATZ 17.

Zu einer schwach (A^i, A^S) - φ -stetigen Bewertung $v|V$ existiert für $\psi := \varphi^{-1}$ genau eine $(\underline{V}, \tilde{V})$ -reguläre ψ -Bewertung $w|L$, die den Bedingungen (i) und (ii) des Theorems 14 genügt. $w|L$ stimmt mit der Fortsetzung von $v|V$ gemäß Theorem 14 überein.

Für (A^i, A^S) -reguläre Bewertungen erhält man folgendes Ergebnis:

SATZ 18.

Seien A^i und A^S ρ -Systeme in V . Dann existiert zu einer (A^i, A^S) -regulären und schwach (A^i, A^S) - φ -stetigen ρ -Bewertung $v|V$ genau eine σ -Bewertung $w|L$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) $V \cup \underline{A}^i \cup \tilde{A}^S \subset L \subset \sigma(V \cup \underline{A}^i \cup \tilde{A}^S)$;
- (ii) $w(a) = v(a)$ für alle $a \in V$;
- (iii) $w|L$ $(\underline{A}^i, \tilde{A}^S)$ -regulär.

$w|L$ stimmt mit der Fortsetzung der schwach σ -stetigen bzw. der schwach (A^i, A^S) - τ -stetigen Bewertung $v|V$ gemäß Theorem 14 überein.

Beweis:

1. Die Eindeutigkeit ergibt sich aus Lemma 16.
2. Existenz. Nach Satz 6 ist $v|V$ auch im Fall $\varphi = \sigma$ schwach

σ -stetig. Sei $w|L$ die σ -stetige bzw. die (A^i, A^S) - τ -stetige Fortsetzung von $v|V$ gemäß Theorem 14. Es wird gezeigt, daß $w|L$ den Bedingungen (i) und (iii) genügt.

Zu (i): Zu jedem $e \in V$ existiert nach Voraussetzung ein $a \in A^i$ mit $e \geq a$. Daher gilt:

$$\inf_{B \vee e} \rho(A^i \vee e) \quad \text{für } B \in A^i \text{ und } e \in V.$$

Mittels Lemma 4 folgt

$$\underline{A}_E^i \subset \sigma(V \cup A^i) \quad \text{für } E \subset V \text{ abzählbar,}$$

d.h. $\underline{V} \subset \sigma(V \cup A^i)$.

Analog folgt $\tilde{V} \subset \sigma(V \cup \tilde{A}^S)$. Somit gilt wegen $A^i \subset \underline{V}$, $\tilde{A}^S \subset \tilde{V}$:

$$\sigma(\underline{V} \cup \tilde{V}) = \sigma(V \cup A^i \cup \tilde{A}^S).$$

Zu (iii): Die Menge $L_1 := \{a \in L : \sup_{A^i \ni b \leq a} w(b) = \inf_{\tilde{A}^S \ni c \geq a} w(c)\}$

enthält V , da $v|V$ (A^i, A^S) -regulär ist. Mittels der σ -Stetigkeit bzw. der (A^i, A^S) - τ -Stetigkeit folgt:

$$(1) \quad V \cup A^i \cup \tilde{A}^S \subset L_1.$$

Wegen $A^i = (A^i)_\phi \cap L$ ist mit A^i auch $\underline{A}^i$ ein ρ -System, und es gilt: $(\underline{A}^i)_\sigma \cap L = \underline{A}^i$. Da ebenso die duale Aussage gilt, folgt aus Korollar 1.17, sowie (1) und (i):

$$(2) \quad w|L_1 \text{ } \sigma\text{-Bewertung mit } L_1 \subset L \subset \sigma(L_1).$$

Mittels Satz 1.13 ergibt sich aus (2): $L_1 = L$.

Mit Hilfe des vorhergehenden Satzes wird ein später benötigtes Kriterium für die schwache σ -Stetigkeit bewiesen.

SATZ 19.

Eine schwach (A^i, A^S) - σ -stetige ρ -Bewertung $v|V$ ist schwach σ -stetig, falls

(i) A^i und A^S ρ -Systeme,

(ii) $A^i \cup A^S \subset \{a \in V : \sup_{A^i \ni b \leq a} v(b) = \inf_{A^S \ni c \geq a} v(c)\},$

(iii) $V \subset \sigma(A^i \cup A^S).$

Beweis:

Aus Voraussetzung (i) und dem ersten Teil von Lemma 1.16

folgt, daß $V_1 := \{a \in V : \sup_{A^i \ni b \leq a} v(b) = \inf_{A^S \ni c \geq a} v(c)\}$ ein

σ -System ist. Wegen (ii) gilt somit:

$v|_{V_1}$ ist (A^i, A^S) -regulär und schwach (A^i, A^S) - σ -stetig.

Sei $w|_{L_1}$ die Fortsetzung von $v|_{V_1}$ gemäß Satz 18.

Zunächst wird gezeigt:

$$(1) \quad v(a) = w(a) \quad \text{für } a \in V \cap L_1.$$

Aus der schwachen (A^i, A^S) - σ -Stetigkeit von $v|_V$ und Lemma 9

folgt: $v^*(a) = w(a)$ für $a \in \underline{A}^i$.

Da $w|_L$ $(\underline{A}^i, \tilde{A}^S)$ -regulär ist, ergibt sich:

$$v(a) \geq w(a) \quad \text{für } a \in V \cap L_1.$$

Analog folgt: $v(a) \leq w(a)$ für $a \in V \cap L_1$.

Wegen (1) und der σ -Stetigkeit von $w|_{L_1}$ ist mit der folgenden Aussage die Behauptung des Satzes bewiesen:

$$(2) \quad V \subset L_1.$$

Gemäß Voraussetzung (iii) gilt $V \subset \sigma(V_1)$. Zu $a_0 \in V$ exis-

tieren also in V_1 eine antitone Folge $(\underline{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und eine

isotone Folge $(\bar{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} \underline{a}_n \leq a_0 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{a}_n$. Wegen (1)

und $\{ \langle \underline{a}_n, b, \bar{a}_m \rangle : b \in \sigma(V_1) \} \subset L_1$ gilt:

$$v(a_0 \wedge \bar{a}_1) \leq w(\langle \underline{a}_n, a_0, \bar{a}_m \rangle) \leq v(\underline{a}_1 \vee a_0) \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N}.$$

Mittels der σ -Stetigkeit von $w|_{L_1}$ folgt: $a_0 \in L_1$. □

2.4. Beispiele

Die Beispiele dieses Abschnitts zeigen, daß Theorem 14 in verschiedenen Situationen der klassischen Maßtheorie anwendbar ist, insbesondere bei der Betrachtung von Maßen bzw. Integralen über topologischen Räumen (vgl. Beispiele B - E).

In Beispielen, denen ein topologischer Raum zugrunde liegt, werden die folgenden Abkürzungen verwendet.

DEFINITION

Sei $(X, \mathcal{G}(X))$ ein topologischer Raum. Dann heißt ein Borel-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$

- a) "regulär", falls $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ -regulär;
- b) " τ -stetig", falls $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ - τ -stetig;
- c) "straff", falls $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ $(\mathcal{K}(X) \cap \mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ -regulär.

Bemerkung:

Ein straffes Borel-Maß ist stets τ -stetig und regulär. Auf einem regulären topologischen Raum ist ein τ -stetiges Borel-Maß regulär.

Das erste Beispiel macht deutlich, daß die Hilfssätze, die zum Beweis von Theorem 14 benötigt werden, selbst auch von Interesse sind.

Beispiel A

Fortsetzung einer unteradditiven Mengenfunktion zu einer "äußeren Kapazität".

Sei $\mathcal{F}$ ein ρ -System im Teilmengenverband $\mathcal{P}(X)$ einer nicht-leeren Menge X . Zum Definitionsbereich einer Choquetschen $\mathcal{F}$ -Kapazität gehört jedes Element von $\mathcal{P}(X)$ (vgl. [CT2], Def.1). Es stellt sich daher die Frage, unter welcher Voraussetzung eine nur auf $\mathcal{F}$ definierte Mengenfunktion ν zu einer Choquetschen $\mathcal{F}$ -Kapazität fortgesetzt werden kann. Eine reellwertige Abbildung $\nu|_{\mathcal{F}}$ muß notwendig schwach σ -stetig sein (vgl. drittes Beispiel zu Satz 1.4). Ist $\nu|_{\mathcal{F}}$ zusätzlich unteradditiv und $\emptyset \in \mathcal{F}$, so existiert zu $\nu|_{\mathcal{F}}$ eine "äußere Kapazität" (vgl. [MY], III T23):

SATZ

Sei X eine nicht-leere Menge, $\mathcal{f} \subset \mathcal{P}(X)$ ein ρ -System mit $\emptyset \in \mathcal{f}$ und $v|_{\mathcal{f}}$ eine unteradditive, schwach σ -stetige Abbildung. Dann wird durch

$$(*) \quad \tilde{v}(A) := \inf_{A \in \mathcal{F} \in \mathcal{f}^\sigma} v|_{\mathcal{F}}(F) \quad \text{für } A \subset X$$

eine unteradditive Choquetsche $\mathcal{f}$ -Kapazität $\tilde{v}|_{\mathcal{P}(X)}$ definiert mit $\tilde{v}|_{\mathcal{f}} = v|_{\mathcal{f}}$.

Beweis:

Die Behauptung ergibt sich durch Anwendung des Fortsetzungsprozesses von Abschnitt 2.2 auf

$$W := \mathcal{P}(X), \quad v := \mathcal{f}, \quad A^i := \emptyset := A^s \quad \text{und} \quad v|_V := v|_{\mathcal{f}}.$$

$v|_V$ ist also unteradditiv und schwach ϕ - τ -stetig. Aus Definition 8 und Lemma 9 folgt $\tilde{v}|_V = v|_{\mathcal{f}^\sigma}$, d.h. für $\tilde{v}$ gemäß (*) gilt:

$$(\alpha) \quad \tilde{v}|_{\mathcal{P}(X)} = \tilde{v}^*|_W.$$

Ferner gilt wegen der Isotonie von $v|_{\mathcal{f}}$ (vgl. erste Bemerkung zu Definition 1):

$$(\beta) \quad \tilde{v}|_{\mathcal{f}} = v|_{\mathcal{f}}.$$

Gemäß (4') in Lemma 11 ist

$$(\gamma) \quad \tilde{v}^*|_W \text{ unteradditiv und bzgl. } W \text{ nach oben } \sigma\text{-stetig.}$$

Gemäß (1') von Lemma 11 gilt $\tilde{v}^*|_V = \underline{v}|_V$, so daß sich mit (4) in Lemma 10 ergibt:

$$(\delta) \quad \tilde{v}^*|_W \text{ ist bzgl. } V \text{ nach unten } \sigma\text{-stetig.}$$

Wegen $\emptyset \in \mathcal{f}$ ist $\tilde{v}$ nach unten beschränkt. Mit (a) - (d) ist also die Behauptung gezeigt.

Zusatz:

Sei X ein Hausdorff-Raum und $\mathcal{f}$ die Familie der kompakten Teilmengen von X . Eine isotone, reellwertige und unteraddi-

tive Abbildung $v|_{\mathcal{F}}$ ist dann schwach σ -stetig, falls zu jedem $K \in \mathcal{F}$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge C existiert mit

$$K \subset C \text{ und } v(K') < v(K) + \varepsilon \quad \text{für } \mathcal{F} \ni K' \subset C$$

(d.h. $v|_{\mathcal{F}}$ ist "von rechts stetig", vgl. [CT1], 15.1).

Ist nämlich $(\underline{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine antitone und $(\overline{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge in $\mathcal{F}$ mit $\inf_{n \in \mathbb{N}} \underline{K}_n \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \overline{K}_n$, so existieren nach Voraussetzung Mengen $G_n \in \mathcal{G}(X)$ mit $\overline{K}_n \subset G_n$ und $v_*(G_n) \leq v(\overline{K}_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$\underline{K}_{n_0} \subset G_1 \cup \dots \cup G_{n_0}.$$

Zu $\underline{K}_{n_0}$ existieren $K_n \in \mathcal{F}$ ($1 \leq n \leq n_0$) mit

$$\underline{K}_n \subset G_n \text{ und } \underline{K}_{n_0} \subset K_1 \cup \dots \cup K_{n_0} \quad (\text{siehe [HS], §50, Th. A}).$$

Ohne Einschränkung kann $\overline{K}_n \subset K_n$ ($1 \leq n \leq n_0$) angenommen werden. Aus Lemma 1.6, a) folgt damit:

$$\begin{aligned} v(\underline{K}_{n_0}) - v(\overline{K}_{n_0}) &\leq v\left(\bigcup_{1 \leq n \leq n_0} K_n\right) - v\left(\bigcup_{1 \leq n \leq n_0} \overline{K}_n\right) \\ &= \sum_{1 \leq n \leq n_0} \varepsilon \cdot 2^{-n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Beispiel B

Fortsetzung eines nicht-negativen, linearen Funktional auf $\mathcal{K}(X)$ zu einem $\mathcal{K}(X)$ - τ -stetigen Funktional.

Im Funktionenverband $\mathbb{R}^X$ erhält man folgendes Ergebnis:

SATZ

Sei X ein lokal-kompakter Raum, $I|_{\mathcal{K}(X)}$ ein nicht-negatives, lineares Funktional und

$$\underline{\mathcal{K}} := \{f \in (\mathcal{K}(X))_{\tau} : I^*(f) > -\infty\}, \quad \widetilde{\mathcal{K}} := \{f \in (\mathcal{K}(X))^{\tau} : I_*(f) < +\infty\}.$$

Dann existiert zu $I|_{\mathcal{K}(X)}$ genau eine $\mathcal{K}(X)$ - τ -stetige, reellwertige Fortsetzung $J|_L$ mit $L \subset \sigma(\underline{\mathcal{K}} \cup \widetilde{\mathcal{K}})$ und

$$J(f \vee g) + J(f \wedge g) = J(f) + J(g) \quad \text{für } f, g \in L.$$

$J|_L$ ist $(\underline{\mathcal{K}}, \widetilde{\mathcal{K}})$ -regulär.

Beweis:

Aus dem Satz von Dini (vgl. [KY], p.239) und der Linearität von $I|_{\mathcal{K}(X)}$ folgt:

$$\inf_{f \in \mathcal{F}} I(f) = 0 \quad \text{für } \mathcal{F} \subset \mathcal{K}(X) \text{ absteigend gerichtet mit } \inf \mathcal{F} = 0.$$

Daraus erhält man wiederum mittels der Linearität von $I|_{\mathcal{K}(X)}$ die schwache τ -Stetigkeit von $I|_{\mathcal{K}(X)}$. Da ein nicht-negatives, lineares Funktional auf einem Vektorverband eine ρ -Bewertung ist, ergibt sich aus Theorem 14 und Satz 17 die Behauptung. □

Die Funktionen in L sind im allgemeinen nicht reellwertig. Dagegen ist $L_0 := \{f \in L : f \text{ reellwertig}\}$ ein Vektorverband und $J|_{L_0}$ linear. Der Einfachheit wegen wird aber nur gezeigt:

Zusatz:

Bezeichnet $J^1|_{L^1}$ die Vervollständigung von $J|_L$, so ist

$L_0^1 := \{f \in L^1 : f \text{ reellwertig}\}$ ein Vektorverband und $J^1|_{L_0^1}$ linear.

Aus der $(\mathcal{K}, \tilde{\mathcal{K}})$ - τ -Stetigkeit von $J|_L$ ergibt sich

$$(1) \quad g_1 + g_2 \in L \quad \text{und} \quad J(g_1 + g_2) = J(g_1) + J(g_2) \\ \text{für } g_1, g_2 \in \mathcal{K} \text{ bzw. } g_1, g_2 \in \tilde{\mathcal{K}} \text{ (wobei } (+\infty) + (+\infty) := +\infty).$$

Wegen der $(\mathcal{K}, \tilde{\mathcal{K}})$ -Regularität von $J|_L$ existieren zu $\varepsilon > 0$

und $f_i \in L_0$ ($i=1,2$) Funktionen $\underline{f}_i \in \mathcal{K}$, $\tilde{f}_i \in \tilde{\mathcal{K}}$ mit

$$\underline{f}_i \leq f_i \leq \tilde{f}_i \quad \text{und} \quad J(\tilde{f}_i) - J(\underline{f}_i) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also gilt wegen (1):

$$(2) \quad L \ni \underline{f}_1 + \underline{f}_2 \leq f_1 + f_2 \leq \tilde{f}_1 + \tilde{f}_2 \in L \quad \text{und} \\ J(\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2) - J(\underline{f}_1 + \underline{f}_2) < \varepsilon.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$f_1 + f_2 \in L_0 \quad \text{und} \quad J^1(f_1) + J^1(f_2) = J^1(f_1 + f_2) \quad \text{für } f_1, f_2 \in L_0^1.$$

Analog erhält man:

$$\alpha \cdot f \in L_0^1 \quad \text{und} \quad J^1(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot J^1(f) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}, f \in L_0^1.$$

Beispiel C

Fortsetzung eines τ -stetigen Baire-Maßes zu einem regulären und τ -stetigen Borel-Maß.

Für Baire-Maße wird der Begriff " τ -stetig" im klassischen Sinne verwendet:

DEFINITION

Sei X ein topologischer Raum und $\nu|_{\mathcal{L}_0(X)}$ ein Baire-Maß.

Dann heißt $\nu|_{\mathcal{L}_0(X)}$ " τ -stetig", wenn für jede absteigend gerichtete Familie $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_0(X)$ mit $\bigcap \mathcal{A} = \emptyset$ gilt: $\inf_{Z \in \mathcal{A}} \nu(Z) = 0$.

Auf einem topologischen Raum X mit $(\mathcal{F}_0(X))_\tau \neq \mathcal{F}_0(X)$ gibt es kein (im Sinne von Definition 1.3) $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{Q}_0(X))$ - τ -stetiges Baire-Maß; jedoch gilt:

LEMMA

Ein Baire-Maß auf einem topologischen Raum X ist stets $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{Q}_0(X))$ -regulär und genau dann τ -stetig, wenn es schwach $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{Q}_0(X))$ - τ -stetig ist.

Beweis:

a) Wegen $\mathcal{L}_0(X) = \sigma(\mathcal{F}_0(X)) = \sigma(\mathcal{Q}_0(X))$ folgt die $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{Q}_0(X))$ -Regularität eines Baire-Maßes aus Satz 1.19.

b) Ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_0(X)$ bzw. $\mathcal{L} \subset \mathcal{Q}_0(X)$ absteigend bzw. aufsteigend gerichtet mit $\bigcap \mathcal{A} \subset \bigcup \mathcal{L}$, so ist $\mathcal{L} := \{Z \cap P : Z \in \mathcal{A}, P \in \mathcal{L}\}$ absteigend gerichtet mit $\bigcap \mathcal{L} = \emptyset$. Für ein τ -stetiges Baire-Maß $\nu|_{\mathcal{L}_0(X)}$ gilt also: $\inf_{C \in \mathcal{L}} \nu(C) = 0$, d.h.

$\inf_{Z \in \mathcal{A}} \nu(Z) \leq \sup_{P \in \mathcal{L}} \nu(P)$. Wegen der $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{Q}_0(X))$ -Regularität

ergibt sich daraus mit Satz 5 die schwache $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{Q}_0(X))$ - τ -Stetigkeit von $\nu|_{\mathcal{L}_0(X)}$. Die Umkehrung ist trivial. ┐

Für ein τ -stetiges Baire-Maß ist also stets Theorem 14 bzw.

Satz 18 anwendbar; man erhält folgendes Ergebnis:

SATZ

Sei $(X, \mathcal{Q}(X))$ ein topologischer Raum und $\mathcal{Q}(X)$ die grösste Topologie auf X derart, daß alle bzgl. $\mathcal{Q}(X)$ stetigen, reellen Funktionen stetig sind. $f(X)$ bzw. $\mathcal{L}(X)$ bezeichne die zu $\mathcal{Q}(X)$ gehörigen abgeschlossenen bzw. Borelschen Teilmengen von X . Dann existiert zu jedem τ -stetigen Baire-Maß $\nu|_{\mathcal{L}_0(X)}$ genau ein τ -stetiges, reguläres Borel-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ mit $\mu|_{\mathcal{L}_0(X)} = \nu$. Es gilt:

$$\mu(F) = \inf\{\nu(Z) : F_0(X) \ni Z \supset F\} \quad \text{für } F \in f(X) \quad \text{und}$$

$$\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F(X) \ni F \subset B\} \quad \text{für } B \in \mathcal{L}(X).$$

Die dualen Gleichungen gelten ebenfalls.

Bemerkungen:

1. Genau dann gilt $\mathcal{Q}(X) = \mathcal{Q}(X)$, wenn X vollständig regulär ist.
2. Auf einem vollständig regulären Raum X ist ein reguläres Borel-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ genau dann τ -stetig, wenn das Baire-Maß $\mu|_{\mathcal{L}_0(X)}$ τ -stetig ist, denn gemäß Satz 18 ist die Fortsetzung eines τ -stetigen Baire-Maßes durch die $(f(X), \mathcal{Q}(X))$ -Regularität eindeutig bestimmt.
3. Zu jedem τ -stetigen Baire-Maß $\nu|_{\mathcal{L}_0(X)}$ existiert genau ein τ -stetiges, nicht-negatives, lineares Funktional $I_\nu|_{\mathcal{C}(X)}$ mit

$$I_\nu(f) = \int_X f \, d\nu \quad \text{für } f \in \mathcal{C}(X),$$
 und umgekehrt (siehe [VN], Part I, Th.24). Ein τ -stetiges, nicht-negatives, lineares Funktional auf $\mathcal{C}(X)$ ist schwach τ -stetig (vgl. Beispiel B). Bezeichnet $J|_L$ die Fortsetzung von $I_\nu|_{\mathcal{C}(X)}$ gemäß Theorem 14 und $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ die Fortsetzung von $\nu|_{\mathcal{L}_0(X)}$ gemäß Theorem 14, so ist $J|_L$ gerade das zu $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ gehörige Integral.

Beispiel D

Fortsetzung eines Produktes von regulären, τ -stetigen Borel-Maßen zu einem Borel-Maß auf dem Produktraum.

Auf dem Produktraum $\prod_{i \in I} X_i$ der topologischen Räume $X_i, i \in I$, ist die Produkt- σ -Algebra $\otimes_{i \in I} \mathcal{L}(X_i)$ stets in der Borel- σ -Algebra $\mathcal{L}(\prod_{i \in I} X_i)$ enthalten; jedoch gilt im allgemeinen keine Gleichheit.

SATZ

Seien $X_i, i \in I \neq \emptyset$, topologische Räume und $\mu_i|_{\mathcal{L}(X_i)}$ τ -stetige, reguläre, normierte Borel-Maße. Dann existiert auf $X := \prod_{i \in I} X_i$ genau ein τ -stetiges, reguläres Borel-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$, welches das Produkt-Maß $\otimes_{i \in I} \mu_i|_{\otimes_{i \in I} \mathcal{L}(X_i)}$ fortsetzt.

Beweis:

Sei $\mathcal{A} := \otimes_{i \in I} \mathcal{L}(X_i)$ und $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}(X) \cap \mathcal{A}$, $\mathcal{G}_1 := \mathcal{G}(X) \cap \mathcal{A}$.

Für das Produktmaß $\nu := \otimes_{i \in I} \mu_i$ wird gezeigt:

- (1) $\nu|_{\mathcal{A}}$ ($\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1$)-regulär,
- (2) $\nu|_{\mathcal{A}}$ schwach $(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1)$ - τ -stetig.

Da $\mathcal{G}_1$ eine Basis der Topologie $\mathcal{G}(X)$ ist, ergibt sich mit (1) und (2) die Behauptung des Satzes aus Theorem 14 und Satz 18.

Zu (1): Die Familie $\mathcal{A}_1 := \{A \in \mathcal{A} : \sup_{\mathcal{F}_1 \ni F \subset A} \nu(F) = \inf_{\mathcal{G}_1 \ni G \supset A} \nu(G)\}$ ist geschlossen bzgl. Komplementbildung (trivial), ein σ -System (Korollar 1.17) und enthält $\{\pi_i^{-1}(A_i) : i \in I, A_i \in \mathcal{L}(X_i)\}^1$, da die Maße $\mu_i|_{\mathcal{L}(X_i)}$ regulär sind. Also gilt $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$.

Zu (2): Wegen (1) und Satz 5 genügt es zu zeigen (vgl. Beispiel C):

- (2.1) $\gamma := \inf_{C \in \mathcal{L}} \nu(C) = 0$ für $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_1$ absteigend gerichtet mit $\bigcap \mathcal{L} = \emptyset$.

¹⁾ $\pi_i : X \rightarrow X_i$ für $i \in I$ bzw. $\pi_T : \prod_{i \in S} X_i \rightarrow \prod_{i \in T} X_i$ für $\emptyset \neq T \subset S \subset I$ bezeichnet die natürliche Projektion.

Da $\mathcal{G}_2 := \rho(\{\pi_i^{-1}(G_i) : i \in I, G_i \in \mathcal{G}(X_i)\})$ eine Basis von $\mathcal{G}(X)$ ist, kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $\mathcal{L}$ eine Teilmenge von $\mathcal{F}_2 := \{F \subset X : CF \in \mathcal{G}_2\}$ ist. Folgende Abkürzungen werden benutzt:

$$X_T := \prod_{i \in T} X_i, \quad v_T := \bigotimes_{i \in T} \mu_i \quad \text{für } \emptyset \neq T \subset I \text{ und } \\ C_a := \{y \in X_{CT} : (a, y) \in C\} \quad \text{für } \emptyset \neq T \subsetneq I, C \subset X, a \in X_T.$$

1. Mit der Vereinbarung $v_\emptyset(C_x) := x_C(x)$ für $x \in X$ gilt:

$$(2.2) \quad X_T \ni x \mapsto v_{CT}(C_x) \text{ nach oben halbstetig} \\ \text{für } C \in \mathcal{L} \text{ und } \emptyset \neq T \subset I,$$

denn im Fall $T \neq I$ existieren zu $G := CC \in \mathcal{G}_2$ offene Mengen

$$G_j^1 \in \mathcal{G}(X_T), \quad G_j^2 \in \mathcal{G}(X_{CT}) \quad (1 \leq j \leq n) \text{ mit } G = \bigcup_{1 \leq j \leq n} G_j^1 \times G_j^2,$$

$$\text{folglich } v_{CT}(G_x) = \sup_{\emptyset \neq N \subset \{1, \dots, n\}} v_{CT}(\bigcup_{j \in N} G_j^2) \cdot x_{\bigcap_{j \in N} G_j^1(x)}.$$

2. Sei $\mathcal{T}$ die Gesamtheit aller Paare (T, a) mit $\emptyset \neq T \subset I$ und $a \in X_T$ derart, daß

$$\inf_{C \in \mathcal{L}} v_{CT}(C_a) \geq \gamma \quad (\text{insbesondere } \inf_{C \in \mathcal{L}} v_{CT}(C_a) \geq \gamma \text{ für } T = I).$$

$\mathcal{T}$ ist nicht leer, denn für jedes $i \in I$ gilt wegen (2.2) und der τ -Stetigkeit von $\mu_i|_{\mathcal{L}(X_i)}$:

$$\int_{X_i} \inf_{C \in \mathcal{L}} v_{I \setminus \{i\}}(C_x) d\mu_i = \inf_{C \in \mathcal{L}} \int_{X_i} v_{I \setminus \{i\}}(C_x) d\mu_i \\ = \inf_{C \in \mathcal{L}} v(C) = \gamma,$$

woraus die Existenz eines Punktes $a \in X_i$ mit $(\{i\}, a) \in \mathcal{T}$ folgt.

3. Bezüglich der Teilweise-Ordnung

$$(T, a) \leq (T', a') \iff T \subset T' \text{ und } \pi_T^{T'}(a') = a$$

auf $\mathcal{T}$ besitzt jede total geordnete Teilmenge $\mathcal{T}_0$ von $\mathcal{T}$ eine kleinste obere Schranke, denn wegen $\mathcal{L} \subset \mathcal{F}_2$ gilt $(T', a') \in \mathcal{T}$ für $T' := \bigcup \{T : (T, a) \in \mathcal{T}_0\}$ und $a' \in X_{T'}$ mit $\pi_T^{T'}(a') = a$ für $(T, a) \in \mathcal{T}_0$.

4. Gemäß dem Zornschen Lemma existiert in $\mathcal{T}$ ein maximales Element (b, T) . Es ist $T = I$, denn andernfalls existiert in

x_i mit $i \in \mathcal{CT}$ ein Punkt a_i mit $(T_0\{i\}, (b, a_i)) \in \mathcal{T}$:

Wegen (2.2) und der τ -Stetigkeit von $\mu_i|_{\mathcal{L}(X_i)}$ ist nämlich

$$\int_{X_i} \inf_{C \in \mathcal{L}} \mathbf{c}(T_0\{i\})^C(b, x) d\mu_i = \inf_{C \in \mathcal{L}} \mathbf{c}_T(C_b) \geq \gamma.$$

Aus $T = I$ folgt: $\inf_{C \in \mathcal{L}} \chi_C(b) \geq \gamma$. Wegen $\cap \mathcal{L} = \emptyset$ ist also $\gamma = 0$.

Bemerkung:

Für $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ gilt der Satz von Fubini, d.h. ist $\emptyset \neq T \subseteq I$ und

$\mu_T := \pi_T^I(\mu)$, $\mu_{\mathcal{CT}} := \pi_{\mathcal{CT}}^I(\mu)$, so gilt für jede Menge $B \in \mathcal{L}(X)$:

(3) $\prod_{i \in T} X_i \ni x \mapsto \mu_{\mathcal{CT}}(B_x)$ ist $\mathcal{L}(\prod_{i \in T} X_i)$ -messbar und

$$(4) \quad \mu(B) = \int_{\prod_{i \in T} X_i} \mu_{\mathcal{CT}}(B_x) d\mu_T.$$

Im Fall einer endlichen bzw. abzählbaren Indexmenge I wurde

von Ressel ([RL], Th.1 bzw. Th.2) für τ -stetige Borel-Maße

$\mu_i|_{\mathcal{L}(X_i)}$ mittels (3) und (4) ein τ -stetiges Borel-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$

definiert, das $\bigotimes_{i \in I} \mu_i$ fortsetzt.

Beispiel E

Fortsetzung eines straffen Inhalts zu einem Radon-Maß.

DEFINITION

Sei X ein Hausdorff-Raum.

1. $\lambda|_{\mathcal{K}(X)}$ heißt "straffer Inhalt", wenn λ eine nicht-negative Abbildung von $\mathcal{K}(X)$ nach $\mathbb{R}$ ist derart, daß

$$\lambda(K_1) - \lambda(K_2) = \sup\{\lambda(K) : \mathcal{K}(X) \ni K \subset K_1 \setminus K_2\}$$

für $K_1, K_2 \in \mathcal{K}(X)$ mit $K_2 \subset K_1$.

2. $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ heißt "Radon-Maß", wenn μ ein Maß auf $\mathcal{L}(X)$ ist derart, daß

a) $\mu(K) < \infty$ für $K \in \mathcal{K}(X)$ und

b) $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : \mathcal{K}(X) \ni K \subset B\}$ für $B \in \mathcal{L}(X)$.

Der folgende Satz wurde von Kiszyński ([KI], Th.1.2) bewiesen.

Alfsen ([AN], 2. Anhang) bemerkte, daß sich dieses Ergebnis nicht

durch Anwendung der von ihm bewiesenen Spezialfälle ([AN], Th.5 und Th.6) von Theorem 14 ergibt. Das zu einem straffen Inhalt gehörige Radon-Maß erhält man jedoch durch **zweimalige** Anwendung von Satz 18.

SATZ

Auf einem Hausdorff-Raum X existiert zu jedem straffen Inhalt $\lambda|_{\mathcal{R}(X)}$ genau ein Radon-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$, das $\lambda|_{\mathcal{R}(X)}$ fortsetzt.

Beweis:

1. Sei $\tilde{\mathcal{R}}(X) := \{A \in \mathcal{R}(X) : \lambda_{\mu}(A) < \infty\}$. Dann besitzt $\lambda|_{\mathcal{R}(X)}$ genau eine Fortsetzung zu einer $(\mathcal{R}(X), \tilde{\mathcal{R}}(X))$ -regulären σ -Bewertung $v|_{\mathcal{O}}$ mit $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{R}(X))$.

Dies folgt aus Satz 18, denn $\lambda|_{\mathcal{R}(X)}$ ist

(1) isoton (trivial), (2) additiv und (3) schwach σ -stetig.

Zu (2): Für $K_1, K_2 \in \mathcal{R}(X)$ gilt wegen $(K_1 \cup K_2) \setminus K_1 = K_2 \setminus (K_1 \cap K_2)$:

$$\lambda(K_1 \cup K_2) - \lambda(K_1) = \lambda(K_2) - \lambda(K_1 \cap K_2).$$

Zu (3): Sei $(\underline{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone und $(\overline{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine antitone Folge in $\mathcal{R}(X)$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} \underline{K}_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \overline{K}_n$. Zu $\varepsilon > 0$ existieren dann Mengen $K_n \in \mathcal{R}(X)$ mit

$$K_n \subset \overline{K}_n \setminus \underline{K}_n \text{ und } \lambda(K_n) + \varepsilon \cdot 2^{-n} \geq \lambda(\overline{K}_n) - \lambda(\underline{K}_n) \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Mittels vollständiger Induktion folgt

$$(*) \quad \lambda\left(\bigcap_{1 \leq n \leq m} K_n\right) + \sum_{1 \leq n \leq m} \varepsilon \cdot 2^{-n} \geq \lambda(\overline{K}_m) - \lambda(\underline{K}_m) \text{ für } m \in \mathbb{N},$$

denn

$$\begin{aligned} & \lambda\left(\bigcap_{1 \leq n \leq m+1} K_n\right) + \sum_{1 \leq n \leq m+1} \varepsilon \cdot 2^{-n} \\ (2) \quad &= \lambda\left(\bigcap_{1 \leq n \leq m} K_n\right) + \sum_{1 \leq n \leq m} \varepsilon \cdot 2^{-n} + \lambda(K_{m+1}) + \varepsilon \cdot 2^{-(m+1)} \\ &\quad - \lambda\left(\bigcap_{1 \leq n \leq m} K_n \cup K_{m+1}\right) \\ &\geq \lambda(\overline{K}_m) - \lambda(\underline{K}_m) + \lambda(\overline{K}_{m+1}) - \lambda(\underline{K}_{m+1}) - (\lambda(\overline{K}_m) - \lambda(\underline{K}_m)). \end{aligned}$$

Da es ein $m_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $\bigcap_{1 \leq n \leq m_0} K_n = \emptyset$ und $\lambda(\emptyset) = 0$ gilt,

folgt die schwache σ -Stetigkeit von $\lambda|_{\mathcal{R}(X)}$ aus (*) und Satz 3.

2. a) Die Restriktion von ν auf $\mathcal{O}_K := \{A \cap K : A \in \mathcal{O}\}$ besitzt für jedes $K \in \mathcal{R}(X)$ genau eine Fortsetzung zu einem straffen Borel-Maß $\mu_K|_{\mathcal{L}(K)}$.

b) Für die straffen Borel-Maße $\mu_K|_{\mathcal{L}(K)}$ gilt

$$\mu_{K_1}|_{\mathcal{L}(K_2)} = \mu_{K_2} \quad \text{für } K_1, K_2 \in \mathcal{R}(X) \text{ mit } K_2 \subset K_1,$$

so daß es genau ein Radon-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ gibt mit

$$\mu|_{\mathcal{L}(K)} = \mu_K \quad \text{für alle } K \in \mathcal{R}(X).$$

$\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ ist eine Fortsetzung von $\lambda|_{\mathcal{R}(X)}$.

Zu a): Für $K \in \mathcal{R}(X)$ ist $\mathcal{O}_0(K)$ eine Basis von $\mathcal{O}(K)$, denn ein kompakter Raum ist vollständig regulär, und es gilt:

$\mathcal{O}_0(K) \subset (\mathcal{R}(K))^\sigma \subset \mathcal{O}_K$. Zu disjunkten, kompakten Mengen

$L, L' \subset K$ existiert also eine Menge $G \in \mathcal{O}_0(K)$ mit $L \subset G$ und

$G \cap L' = \emptyset$. Damit ergibt sich aus der Straffheit von $\lambda|_{\mathcal{R}(K)}$:

$$\nu(L) = \inf_{\mathcal{O}_0(K) \ni G \supset L} \nu(G) \quad \text{für } L \in \mathcal{R}(K). \text{ Wegen } (\mathcal{O}_0(K))^\sigma = \mathcal{O}_0(K)$$

und $\mathcal{O}_K = \sigma(\mathcal{R}(K))$ ist $\nu|_{\mathcal{O}_K}$ folglich $(\mathcal{R}(K), \mathcal{O}_0(K))$ -regulär

(siehe Korollar 1.17). Aus der Kompaktheit von K und Satz 5

folgt ferner, daß $\nu|_{\mathcal{O}_K}$ schwach $(\mathcal{R}(K), \mathcal{O}_0(K))$ - τ -stetig ist.

Somit ergibt sich 2.a) aus Satz 18.

Zu b): Die Behauptung von 2.b) ist trivial. |

Bemerkung:

Für jedes $K \in \mathcal{R}(X)$ enthält das σ -System $\mathcal{O}_K$ wegen $\mathcal{O}_0(K) \subset (\mathcal{R}(K))^\sigma$ die Baireschen Teilmengen von K . Daher ist zum Beispiel der zweite Fortsetzungsschritt unnötig, wenn X metrisierbar ist.

Die Restriktion eines regulären Borel-Maßes auf $\mathcal{R}(X)$ ist ein straffer Inhalt. Somit ergibt sich aus dem vorhergehenden Satz:

KOROLLAR

Sei X ein Hausdorff-Raum und $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ ein reguläres Borel-Maß.

Dann wird durch die Formel

$$(*) \quad \mu_t(B) := \sup\{\mu(K) : \mathcal{K}(X) \ni K \subset B\} \quad \text{für } B \in \mathcal{L}(X)$$

ein straffes Borel-Maß $\mu_t|_{\mathcal{L}(X)}$ definiert; $\mu_t|_{\mathcal{L}(X)}$ heißt der "Radon-Teil" von $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$.

Bemerkung:

Für jeden $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ -regulären Inhalt $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ mit $\mu(K) < \infty$ für $K \in \mathcal{K}(X)$, wird durch $(*)$ ein straffes Borel-Maß definiert. Jedoch ist die $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ -Regularität von $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ wesentlich, was von Topsøe ([TE2], Bemerkung zu Th.2.2) nicht beachtet wurde. Ist nämlich $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ ein nicht-reguläres Borel-Maß auf einem kompakten Raum (siehe [HS], p.231, Ex.10), so ist μ_t nicht additiv.

Die Mengenfunktion $\mu_t|_{\mathcal{L}(X)}$ gemäß $(*)$ ist für jede nicht-negative, oberadditive Mengenfunktion $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ ebenfalls nicht-negativ und oberadditiv, so daß durch

$$\tilde{\mu}_t(B) := \inf\left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_t(A_n) : A_n \in \mathcal{L}(X) \text{ mit } B \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right\} \quad \text{für } B \in \mathcal{L}(X)$$

der "Radon-Teil" von $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ definiert wird, falls $\mu(K) < \infty$ für $K \in \mathcal{K}(X)$ gilt.

Teil II Fin Funktionenverband über W

§3. Zuordnung von "Maß" und "Integral"

Ist $(X, \mathcal{O}, \mu)$ ein finiter Maßraum und f eine meßbare Funktion von X nach $[0,1]$, so gilt für das Integral von f bzgl. μ die Gleichung:

$$\int_X f \, d\mu = \int_0^1 \mu(\{f \geq t\}) \, dt = \int_0^1 \mu(\{f > t\}) \, dt .$$

Zur Berechnung des Integrals von f genügt es also, die der Funktion f im Verband $W := \mathcal{P}(X)$ zugeordnete Kette $t \mapsto \{f \geq t\}$ oder $t \mapsto \{f > t\}$ ($t \in [0,1]$) zu kennen. Darüber hinaus ist f selbst durch die Kette $t \mapsto \{f \geq t\}$ oder $t \mapsto \{f > t\}$ ($t \in [0,1]$) eindeutig bestimmt. Identifiziert man jede Abbildung f von X nach $[0,1]$ mit der Menge H_f , deren Elemente die antitonen Abbildungen y von $[0,1]$ in W sind mit $\{h > t\} \subset y(t) \subset \{h \geq t\}$ für alle $t \in [0,1]$, so erhält man den unten definierten Verband $\mathcal{F}(W)$ (vgl. Abschnitt 3.5). In dieser Theorie übernehmen die Elemente von $\mathcal{F}(W)$ also die Aufgabe der $[0,1]$ -wertigen Funktionen über der Grundmenge X .

Von Carathéodory ([CY], 3.Kapitel) wurden in ähnlicher Weise die Ortsfunktionen über einem Somenring eingeführt. Aufgrund anderer Zielsetzungen ergeben sich jedoch keine weiteren Parallelitäten. Insbesondere wurde von Carathéodory wesentlich die zugrundeliegende Ringstruktur ausgenutzt.

In Verbindung mit einem ρ -System $V \subset W$ bzw. einem Paar (A^i, A^s) von Teilmengen von V (vgl. Vereinbarung 1.1), werden "V-meßbare" bzw. "stetige" Funktionen in $\mathcal{F}(W)$ betrachtet. Diese Funktionen induzieren in natürlicher Weise reellwertige Abbildungen auf dem Raum der Bewertungen des Verbandes V , die im dritten Teil der Arbeit von Bedeutung sind.

3.1. Ortsfunktionen

Zunächst wird die für diesen Teil grundlegende Definition gegeben.

DEFINITION 1.

Für $y_1, y_2 \in Y := \{y \in W^{[0,1]} : y \text{ antiton}\}$ sei

(1) " $y_1 \leq y_2$ ", falls

$$y_1(s) \leq y_2(t) \text{ für alle } s, t \in [0,1] \text{ mit } s > t.$$

Diese Relation auf Y ist reflexiv und transitiv. Durch

(2) " $y_1 \sim y_2$ ", falls $y_1 \leq y_2$ und $y_2 \leq y_1$

wird also eine Äquivalenzrelation auf Y definiert.

$\mathcal{F}(W)$ bezeichnet die zugehörigen Äquivalenzklassen und $[]$

die kanonische Abbildung von Y auf $\mathcal{F}(W)$.

Ein Element von $\mathcal{F}(W)$ heißt "Ortsfunktion über W ".

Für die von Y auf $\mathcal{F}(W)$ induzierte Ordnung wird ebenfalls " $\leq$ " geschrieben, d.h. für Ortsfunktionen $[y_1], [y_2]$ über W sei

(3) " $[y_1] \leq [y_2]$ ", falls $y_1 \leq y_2$ gemäß (1).

Beispiel:

a) Seien a_j ($j=1,2$) Elemente in W . Dann sind die konstanten Abbildungen $a'_j: t \mapsto a_j$ von $[0,1]$ nach W genau dann äquivalent, wenn $a_1 = a_2$ ist. Für das kleinste bzw. größte Element 0 bzw. 1 in W gilt:

$$[0] \leq h \leq [1] \text{ für alle } h \in \mathcal{F}(W).$$

b) Ist W der Teilmengenverband einer Menge X und A ein Element von W , so entspricht der Ortsfunktion $[A]$ die charakteristische Funktion χ_A (siehe Abschnitt 3.5).

Bemerkung:

a) Zwei Elemente $y_1, y_2 \in Y$ sind äquivalent, wenn sie auf einer dichten Teilmenge von $[0,1]$ übereinstimmen.

b) Ist D eine dichte Teilmenge von $[0,1]$ und z eine antitone Abbildung von D nach W , so ist y mit

$$y(t) := \inf_{D \ni d \leq t} z(d) \quad \text{für } t \in [0,1] \quad (\inf \emptyset = 1)$$

ein Element von Y , das mit z auf D übereinstimmt. Wegen Teil a) der Bemerkung ist also durch z eindeutig eine Ortsfunktion über W bestimmt.

Im folgenden wird Y als Unterverband von $W^{[0,1]}$ angesehen. Y ist ein τ -System im τ -distributiven τ -Verband $W^{[0,1]}$.

LEMMA 2.

Jede Äquivalenzklasse $h \in \mathcal{F}(W)$ enthält ein kleinstes Element $\underline{h} \in h$ und ein größtes Element $\bar{h} \in h$. Es gilt:

- (1) $\underline{h}(1) = 0$ und $\underline{h}(t) = \sup_{s>t} (s)$ für $t \in [0,1[$ und $y \in h$,
- (2) $\bar{h}(0) = 1$ und $\bar{h}(t) = \inf_{s<t} (s)$ für $t \in]0,1]$ und $y \in h$.

Beweis:

Für $y_1, y_2 \in h$ und $t \in [0,1[$ gilt:

$$\sup_{s>t} y_1(s) \geq y_2(s_0) \quad \text{und} \quad \sup_{s>t} y_2(s) \geq y_1(s_0) \quad \text{für alle } s_0 > t,$$

$$\text{d.h.} \quad \sup_{s>t} y_1(s) = \sup_{s>t} y_2(s).$$

Durch (1) ist also $\underline{h}$ wohldefiniert. Aus (1) folgt unmittelbar:

$$[\underline{h}] = h \quad \text{und} \quad \underline{h} \leq y \quad \text{für alle } y \in h.$$

Ebenso ergibt sich die duale Aussage.

Für das Folgende von grundlegender Bedeutung ist

SATZ 3.

$(\mathcal{F}(W), \leq)$ ist ein τ -distributiver τ -Verband und die kanonische Abbildung von Y auf $\mathcal{F}(W)$ ist ein τ -Morphismus.

Beweis:

Sei $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathcal{F}(W)$ und $H \subset Y$ mit $\mathcal{H} = \{[y] : y \in H\}$. Da Y ein τ -distributiver τ -Verband ist, genügt es zu zeigen:

$$[\sup H] = \sup \mathcal{H} \quad \text{und} \quad [\inf H] = \inf \mathcal{H}.$$

Es gilt $\underline{h} \leq \sup H$ für alle $h \in \mathcal{H}$, also

$$(1) \quad h \leq [\sup H] \quad \text{für alle } h \in \mathcal{H}.$$

Ist $g \in \mathcal{F}(W)$ eine weitere obere Schranke zu $\mathcal{H}$, so folgt:

$$\bar{g} \geq \sup_{h \in \mathcal{H}} \bar{h} \geq \sup H, \text{ also}$$

$$(2) \quad g \geq [\sup H] \quad \text{für jede obere Schranke } g \text{ von } \mathcal{H}.$$

Analog erhält man: $[\inf H] = \inf \mathcal{H}.$

W kann in kanonischer Weise in $\mathcal{F}(W)$ eingebettet werden, indem man jedes Element $a \in W$ mit der Äquivalenzklasse identifiziert, die die konstante Abbildung $t \mapsto a$ enthält. Im folgenden wird W stets als Unterverband von $\mathcal{F}(W)$ aufgefaßt, denn gemäß dem vorhergehenden Satz gilt sogar

KOROLLAR 4.

W ist ein τ -System im τ -Verband $\mathcal{F}(W)$.

3.2. Darstellung von "Integralen" auf meßbaren Ortsfunktionen

Jeder Bewertung auf V wird in diesem Abschnitt in eindeutiger Weise eine "affine" Bewertung auf den " V -meßbaren" Ortsfunktionen zugeordnet und umgekehrt.

DEFINITION 5.

a) $\mathcal{L}(V)$ bezeichnet die " V -meßbaren" Ortsfunktionen über W , d.h.

$$\mathcal{L}(V) := \{[y] : y \in Y \text{ mit } y(t) \in V \text{ für alle } t \in [0,1]\}.$$

b) $\mathcal{L}_0(V)$ bezeichnet die " V -meßbaren Treppenfunktionen", d.h.

$$\mathcal{L}_0(V) := \{[y] : y \in Y \text{ mit } \{y(t) : t \in [0,1]\} \subset V \text{ endlich}\}.$$

Bemerkung:

Ein Repräsentant $y \in h$ einer V -meßbaren Ortsfunktion $h \in \mathcal{L}(V)$ ist nicht notwendig ein Element von $V^{[0,1]}$.

Eine unmittelbare Konsequenz aus der vorhergehenden Definition

stellt dar

SATZ 6.

$\mathcal{L}(V)$ ist ein Unterverband von $\mathcal{F}(W)$, $\mathcal{L}_0(V)$ ein Unterverband von $\mathcal{L}(V)$ und V im Sinne von Korollar 4 ein Unterverband von $\mathcal{L}_0(V)$.

Für die Elemente von $\mathcal{L}_0(V)$ wird folgende Schreibweise verwendet.

Bezeichnung:

Für $n \in \mathbb{N}$, $b_j \in V$ ($1 \leq j \leq n$) mit $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ und

$\beta_j \in]0, 1]$ ($1 \leq j \leq n$) mit $\sum_{j=1}^n \beta_j = 1$ bezeichnet

$\sum_{j=1}^n \beta_j b_j$ das Element in $\mathcal{L}_0(V)$, das auf dem Intervall

$\left] \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j, \sum_{j=1}^k \beta_j \right[$ mit der Konstanten b_k übereinstimmt ($1 \leq k \leq n$).

Für $a \in V$ ist also $a = 1a$.

Bemerkung:

Jedes Element $h \in \mathcal{L}_0(V)$ ist eindeutig in der Form $h = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j$

mit $b_1 > b_2 > \dots > b_n$ darstellbar.

$\mathcal{L}(V)$ ist in dem von $\mathcal{L}_0(V)$ erzeugten σ -System enthalten, denn es gilt der

SATZ 7.

Zu $h \in \mathcal{L}(V)$ existieren in $\mathcal{L}_0(V)$ eine isotone Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

und eine antitone Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = h = \inf_{n \in \mathbb{N}} g_n$.

Beweis:

Sei $y \in h \cap V^{[0, 1]}$. Dann sind

$$f_n := \sum_{j=1}^{2^n} 2^{-n} y(j \cdot 2^{-n}) \quad \text{und} \quad g_n := \sum_{j=1}^{2^n} 2^{-n} y((j-1) \cdot 2^{-n}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

geeignet, denn es gilt $f_n \leq f_{n+1} \leq h \leq g_{n+1} \leq g_n$ für $n \in \mathbb{N}$

und $\bar{f}_n(t \cdot 2^{-n}) \geq y(t) \geq \underline{g}_n(t \cdot 2^{-n})$ für $t \in]2^{-n}, 1 - 2^{-n}[$ und $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung:

Falls V bedingt σ -vollständig ist, gilt also

$$\mathcal{L}(V) = (\mathcal{L}_0(V))_{\sigma} \cap (\mathcal{L}_0(V))^{\sigma}.$$

Im folgenden wird eine spezielle Klasse von ρ -Bewertungen auf $\mathcal{L}(V)$ betrachtet.

DEFINITION 8.

Eine ρ -Bewertung $I|\mathcal{L}(V)$ heißt "affin", wenn sie der folgenden Bedingung genügt:

$$(L') \quad I\left(\sum_{j=1}^n \beta_j b_j\right) = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot I(b_j) \quad \text{für} \quad \sum_{j=1}^n \beta_j b_j \in \mathcal{L}_0(V).$$

Zunächst wird gezeigt

SATZ 9.

Sei $I|\mathcal{L}(V)$ eine affine ρ -Bewertung. Dann existieren zu $h \in \mathcal{L}(V)$ und $\epsilon > 0$ Elemente $f, g \in \mathcal{L}_0(V)$ mit

$$f \leq h \leq g \quad \text{und} \quad I(g) - I(f) < \epsilon.$$

Beweis:

Für $y \in h \cap V^{[0,1]}$ seien $f_n, g_n \in \mathcal{L}_0(V)$ wie im Beweis zu Satz 7 definiert. Dann gilt wegen (L'):

$$I(g_n) - I(f_n) = 2^{-n}(I(y(0)) - I(y(1))) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{d.h.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (I(g_n) - I(f_n)) = 0.$$

KOROLLAR 10.

Eine affine ρ -Bewertung $I|\mathcal{L}(V)$ ist durch ihre Werte auf V eindeutig bestimmt.

Im nachstehenden Satz wird eine zu (L') äquivalente Bedingung angegeben, die unabhängig von $\mathcal{L}_0(V)$ formuliert ist. Dabei wird die folgende Abkürzung verwendet.

Bezeichnung:

Sei $h \in \mathcal{F}(W)$ und seien $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ mit $\alpha_1 < \alpha_2$. Dann bezeichnet h_{α_1, α_2} das Element in $\mathcal{F}(W)$ mit

$$\bar{h}_{\alpha_1, \alpha_2}(t) = \bar{h}(\alpha_1 + t \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)) \quad \text{für } t \in]0,1[.$$

SATZ 11.

Für jede ρ -Bewertung $I|_{\mathcal{L}(V)}$ ist die Bedingung (L') äquivalent mit

$$(L) \quad I(h) = \alpha I(h_{0,\alpha}) + (1-\alpha)I(h_{\alpha,1}) \quad \text{für } h \in \mathcal{L}(V), \alpha \in]0,1[.$$

Beweis:

1. Sei $I|_{\mathcal{L}(V)}$ eine ρ -Bewertung mit Eigenschaft (L).

Für $h \in \mathcal{L}(V)$ und $\beta, \gamma \in [0,1]$ mit $\beta < \gamma < 1$ gilt:

$$h_{\beta,\gamma} = (h_{\beta,1})_{0,\gamma'} \quad \text{mit } \gamma' := \frac{\gamma-\beta}{1-\beta}, \text{ denn}$$

$$(\overline{h_{\beta,1}})_{0,\gamma'}(t) = \overline{h_{\beta,1}}(t\gamma') = \overline{h}(\beta+t\gamma(1-\beta)) = \overline{h}(\beta+t(\gamma-\beta)).$$

$$\text{Analog erhält man: } h_{\gamma,1} = (h_{\beta,1})_{\gamma',1}.$$

Wegen (L) und $1-\gamma' = \frac{1-\gamma}{1-\beta}$ gilt also:

$$(1-\beta)I(h_{\beta,1}) = (\gamma-\beta)I(h_{\beta,\gamma}) + (1-\gamma)I(h_{\gamma,1}).$$

Daraus folgt mittels vollständiger Induktion:

$$I(h) = \sum_{j=1}^n (\alpha_j - \alpha_{j-1}) I(h_{\alpha_{j-1}, \alpha_j}) \quad \text{für } h \in \mathcal{L}(V) \text{ und}$$

$$\alpha_j \in [0,1] \quad (0 \leq j \leq n) \text{ mit } 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = 1.$$

$I|_{\mathcal{L}(V)}$ genügt also auch der Bedingung (L').

2. Sei umgekehrt $I|_{\mathcal{L}(V)}$ eine ρ -Bewertung mit Eigenschaft (L').

Zu $h \in \mathcal{L}(V)$ und $\varepsilon > 0$ existiert gemäß Satz 9

$$(1) \quad f \in \mathcal{L}_0(V) \text{ mit } f \leq h \text{ und } I(h) \leq I(f) + \varepsilon.$$

Zu f und $\alpha \in]0,1[$ existiert eine Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j \quad \text{mit } \alpha = \sum_{j=1}^k \beta_j \quad \text{für geeignetes } k \in \{1, \dots, n-1\}.$$

$$\text{Damit gilt: } f_{0,\alpha} = \sum_{j=1}^k \frac{1}{\alpha} \beta_j b_j \quad \text{und} \quad f_{\alpha,1} = \sum_{j=k+1}^n \frac{1}{1-\alpha} \beta_j b_j.$$

Wegen (L') folgt:

$$(2) \quad I(f) = \alpha I(f_{0,\alpha}) + (1-\alpha)I(f_{\alpha,1}).$$

Aus (1) und (2) ergibt sich:

$$\begin{aligned} I(h) &\leq I(f) + \varepsilon \\ &= \alpha I(f_{0,\alpha}) + (1-\alpha)I(f_{\alpha,1}) + \varepsilon \\ &\leq \alpha I(h_{0,\alpha}) + (1-\alpha)I(h_{\alpha,1}) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Analog folgt: $I(h) \geq \alpha I(h_{0,\alpha}) + (1-\alpha)I(h_{\alpha,1}) - \varepsilon$.

Jede Bewertung auf $\mathcal{L}(V)$ ist offenbar auch eine Bewertung auf V . Eine eindeutige Zuordnung erhält man, wenn nur affine Bewertungen auf $\mathcal{L}(V)$ betrachtet werden.

THEOREM 12.

Zu jeder ρ -Bewertung $v|V$ existiert genau eine ρ -Bewertung

$I_v|\mathcal{L}(V)$ mit

$$(1) \quad I_v|V = v|V,$$

$$(2) \quad I_v|\mathcal{L}(V) \text{ affin.}$$

$I_v|\mathcal{L}(V)$ ist gegeben durch

$$(*) \quad I_v(h) = \int_0^1 v(y(t)) \, dt \quad \text{für } y \in h \cap V^{[0,1]}.$$

Beweis:

- Existenz: Seien $h \in \mathcal{L}(V)$ und $y_1, y_2 \in h \cap V^{[0,1]}$. Dann sind die Abbildungen $f_i: t \mapsto v(y_i(t))$ ($i=1,2$) von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ antiton, also meßbar und beschränkt, und die Menge $\{t : t \in [0,1] \text{ mit } f_1(t) \neq f_2(t)\}$ ist abzählbar, denn für jede Stetigkeitsstelle t von f_1 und f_2 ist $f_1(t) = f_2(t)$.

Für $I_v|\mathcal{L}(V)$ gemäß (*) gilt also

$$a) \quad I_v|\mathcal{L}(V) \text{ ist wohldefiniert.}$$

Da $v|V$ eine ρ -Bewertung ist, folgt mit Satz 3:

$$b) \quad I_v|\mathcal{L}(V) \text{ ist eine } \rho\text{-Bewertung.}$$

Ferner ergibt sich aus den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals:

$$c) \quad \text{für } I_v|\mathcal{L}(V) \text{ gilt (1) und (2).}$$

- Eindeutigkeit: Korollar 10 liefert sofort die Behauptung.

Bemerkung:

Eine ρ -Bewertung $I|_{\mathcal{L}(V)}$ ist nicht notwendig affin, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel:

Sei $v|_V$ eine nicht konstante ρ -Bewertung und $a, b \in V$ mit $a > b$ und $v(a) > v(b)$. Für $f_0 := \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ ist dann $I|_{\mathcal{L}(V)}$ mit $I(f) := I_v(f_0 \vee f)$ eine nicht-affine ρ -Bewertung, denn es gilt:

$$I(f_0) = I_v(f_0) = \frac{1}{2}v(a) + \frac{1}{2}v(b) \quad \text{und} \quad I(a) = v(a), \text{ aber} \\ I(b) = I_v(f_0) > v(b).$$

3.3. Invarianz der schwachen Stetigkeit

Obwohl $A^S \subset V$ nicht die Eigenschaften einer Topologie haben muß (im allgemeinen ist A^S kein ρ -System und nicht nach oben τ -geschlossen), erweist sich folgende Definition als zweckmäßig.

DEFINITION 13.

a) Eine Ortsfunktion $h \in \mathcal{F}(W)$ heißt

"bzgl. (A^i, A^S) nach oben bzw. unten halbstetig", falls zu $r, s \in [0, 1]$ mit $r < s$ ein Element $a \in A^i$ bzw. $a \in A^S$ existiert mit $\bar{h}(r) \geq a \geq \bar{h}(s)$.

$\mathcal{U}(A^i, A^S)$ bzw. $\mathcal{U}^S(A^i, A^S)$ bezeichnet die bzgl. (A^i, A^S) nach oben bzw. unten halbstetigen Ortsfunktionen über W .

b) Eine Ortsfunktion $h \in \mathcal{F}(W)$ heißt "bzgl. (A^i, A^S) stetig", falls h bzgl. (A^i, A^S) nach oben und unten halbstetig ist.

$\mathcal{U}(A^i, A^S)$ bezeichnet die bzgl. (A^i, A^S) stetigen Ortsfunktionen über W .

Bemerkungen:

1. Für ein $y \in h$ gelte:

$$(*) \quad \text{Zu } r, s \in [0, 1] \text{ mit } r < s \text{ existiert ein } a \in A^i \text{ mit} \\ y(r) \geq a \geq y(s).$$

Dann gilt (*) für alle $y \in h$, insbesondere auch für $\underline{h}$.

2. Es gilt stets $A^i \subset \mathcal{C}^i(A^i, A^S)$ und $A^S \subset \mathcal{C}^S(A^i, A^S)$.

Umgekehrt ist eine bzgl. (A^i, A^S) nach oben bzw. unten halbstetige Ortsfunktion $a \in W$ ein Element von A^i bzw. A^S . Insbesondere ist eine konstante Ortsfunktion nicht notwendig stetig.

3. a) $\mathcal{C}^i(A^i, A^S)$ bzw. $\mathcal{C}^S(A^i, A^S)$ ist stets nach unten bzw. oben ρ -geschlossen.

b) $\mathcal{C}^i(A^i, A^S)$, $\mathcal{C}^S(A^i, A^S)$ und $\mathcal{C}(A^i, A^S)$ sind ρ -Systeme in $\mathcal{F}(W)$, falls A^i und A^S ρ -Systeme in W sind.

Beispiel:

Sei A^i bzw. A^S die Gesamtheit der abgeschlossenen bzw. offenen Mengen eines topologischen Raumes X und $W = \mathcal{P}(X)$. Identifiziert man den Verband der $[0,1]$ -wertigen Funktionen auf X mit $\mathcal{F}(W)$ (siehe Abschnitt 3.5), so entsprechen den $[0,1]$ -wertigen, nach oben halbstetigen bzw. nach unten halbstetigen bzw. stetigen Funktionen auf X die Elemente von $\mathcal{C}^i(A^i, A^S)$ bzw. $\mathcal{C}^S(A^i, A^S)$ bzw. $\mathcal{C}(A^i, A^S)$.

Ist $h \in \mathcal{C}^i(A^i, A^S)$, so gilt $\bar{h}(t) \in (A^i)_\sigma$ für $t \in]0,1[$. Daraus folgt

LEMMA 14.

a) Ist A^i nach unten bedingt ρ -geschlossen, so gilt:

(1) $\bar{h}(t) \in A^i$ für alle $h \in \mathcal{C}^i(A^i, A^S)$ und $t \in]0,1[$;

(2) $\mathcal{C}^i(A^i, A^S) \cap \mathcal{L}(V)$
 $= \{h \in \mathcal{C}^i(A^i, A^S) : a \geq h \geq b \text{ für geeignete } a, b \in V\}$.

b) Für $\mathcal{C}^S(A^i, A^S)$ gilt die zu a) analoge Aussage.

c) $\mathcal{C}(A^i, A^S) \subset \mathcal{L}(V)$, falls $(A^i)_\sigma \cup (A^S)^\sigma \subset V$.

Bemerkung:

Im allgemeinen ist eine bzgl. (A^i, A^S) stetige Ortsfunktion

nicht V-meßbar, denn ist etwa $W = \bar{\mathbb{R}}$, $A^i = A^s = V = \mathbb{Q}$ und h das Element in $\mathcal{F}(W)$ mit $\bar{h}(t) = 1 - t$ für $t \in]0,1[$, so gilt $h \in \mathcal{C}(A^i, A^s)$ mit $1 \geq h \geq 0$, aber $h \notin \mathcal{L}(V)$.

Von besonderem Interesse sind die folgenden Teilsysteme:

DEFINITION 15.

$$\mathcal{C}_0^i(A^i, A^s) := \{h : h \in \mathcal{C}^i(A^i, A^s) \cap \mathcal{L}(V) \text{ mit } h \leq a \text{ für ein } a \in A^i\};$$

$$\mathcal{C}_0^s(A^i, A^s) := \{h : h \in \mathcal{C}^s(A^i, A^s) \cap \mathcal{L}(V) \text{ mit } h \geq a \text{ für ein } a \in A^s\};$$

$$\mathcal{C}_0(A^i, A^s) := \mathcal{C}_0^i(A^i, A^s) \cap \mathcal{C}_0^s(A^i, A^s).$$

Bezeichnungen:

Falls keine Unklarheiten zu befürchten sind, wird statt

$\mathcal{C}_0^i(A^i, A^s)$ bzw. $\mathcal{C}_0^s(A^i, A^s)$ bzw. $\mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ abkürzend $\mathcal{C}_0^i$ bzw. $\mathcal{C}_0^s$ bzw. $\mathcal{C}_0$ geschrieben.

Für den Beweis von Satz 17 und Satz 4.10 wird benötigt

LEMMA 16.

Für eine absteigend gerichtete Familie H reellwertiger, antitoner Funktionen auf $[0,1]$ gilt:

$$\int_0^1 (\inf H)(t) dt = \inf_{f \in H} \int_0^1 f(t) dt.$$

Die duale Aussage gilt ebenso.

Beweis:

Die Funktion $\inf H$ ist antiton, also meßbar. Sei

$g_f(t) := \inf_{s < t} f(s)$ für $f \in H$ und $t \in]0,1[$. Dann ist

(1) $\{g_f : f \in H\} \subset \mathcal{C}^i(]0,1[)$ absteigend gerichtet,

und für jedes $f \in H$ gilt:

(2) $\{t \in]0,1[: g_f(t) \neq f(t)\}$ abzählbar,

(3) $g_f(t+\epsilon) \leq f(t) \leq g_f(t)$ für alle $\epsilon > 0$, $t \in]0,1-\epsilon[$.

$$\begin{aligned} \text{Daraus folgt: } \inf_{f \in H} \int_0^1 f(t) dt &= \inf_{f \in H} \int_0^1 g_f(t) dt \\ &\stackrel{(2)}{=} \inf_{f \in H} \int_0^1 g_f(t) dt \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_0^1 \inf_{f \in H} g_f(t) dt \\ &= \int_0^1 \inf_{f \in H} f(t) dt \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_0^1 \inf_{f \in H} f(t) dt. \end{aligned}$$

Beim Übergang von $v|V$ zu $I_v|\mathcal{L}(V)$ bleiben Stetigkeitseigenschaften invariant.

SATZ 17.

Für eine ρ -Bewertung $v|V$ und $I_v|\mathcal{L}(V)$ gemäß Theorem 12 sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $v|V$ schwach (A^i, A^S) - φ -stetig;
- (ii) $I_v|\mathcal{L}(V)$ schwach $(\mathcal{C}_0^i, \mathcal{C}_0^S)$ - φ -stetig.

Beweis:

Wegen $A^i \subset \mathcal{C}_0^i$ und $A^S \subset \mathcal{C}_0^S$ ist lediglich zu zeigen, daß (i) die Aussage (ii) impliziert. Sei also $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}(V)$ mit $|\mathcal{E}| < \varphi$ und $\mathcal{H}_1 \subset \rho(\mathcal{C}_0^i \cup \mathcal{E})$ absteigend gerichtet, $\mathcal{H}_2 \subset \rho(\mathcal{C}_0^S \cup \mathcal{E})$ aufsteigend gerichtet mit $|\mathcal{H}_1| \leq \varphi$, $|\mathcal{H}_2| \leq \varphi$ und $\inf \mathcal{H}_1 \leq \sup \mathcal{H}_2$.

Zu $\mathcal{E}$, $\mathcal{C}_0^i$, $\mathcal{C}_0^S$ existieren $E, C^i, C^S \subset Y \cap V^{[0,1]}$ mit $|E| < \varphi$ und $\mathcal{E} = \{[y] : y \in E\}$, $\mathcal{C}_0^i = \{[y] : y \in C^i\}$, $\mathcal{C}_0^S = \{[y] : y \in C^S\}$. Ferner existieren $H_1 \subset \rho(C^i \cup E)$ und $H_2 \subset \rho(C^S \cup E)$ mit $|H_1| \leq \varphi$ und $\mathcal{H}_1 = \{[y] : y \in H_1\}$ ($i=1,2$).

Wegen Satz 3 kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß H_1 absteigend und H_2 aufsteigend gerichtet ist.

a) Es genügt zu zeigen:

$$(*) \quad \int_0^1 \inf_{y \in H_1} v(y(t)) \, dt \leq \int_0^1 \sup_{y \in H_2} v(y(t)) \, dt,$$

denn gemäß Lemma 16 gilt:

$$\begin{aligned} \inf_{h \in \mathcal{H}_1} I_v(h) &= \inf_{y \in H_1^0} \int_0^1 v(y(t)) \, dt = \int_0^1 \inf_{y \in H_1} v(y(t)) \, dt \quad \text{und} \\ \sup_{h \in \mathcal{H}_2} I_v(h) &= \int_0^1 \sup_{y \in H_2} v(y(t)) \, dt. \end{aligned}$$

b) Für $E(t) := \{y(t) : y \in E\}$ gilt:

$$(1) \quad |E(t)| < \varphi \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu $t \in]0, 1-\varepsilon[$ und $y \in H_2$ ein $b_y(t) \in \rho(A^S \cup E(t))$ mit

$$(2) \quad y(t) \geq b_y(t) \geq y(t + \frac{1}{3}\epsilon),$$

denn es gilt $H_2 \subset \rho(C^S \cup E)$ und die Elemente y in Y , für die ein derartiges $b_y(t)$ existiert, bilden ein ρ -System, das C^S und E enthält. Ebenso existiert zu $t \in]0, 1-\epsilon[$ und $y \in H_1$ ein $a_y(t) \in \rho(A^i \cup E(t+\epsilon))$ mit

$$(3) \quad y(t + \frac{2}{3}\epsilon) \geq a_y(t) \geq y(t + \epsilon).$$

Aus der Ungleichung $\inf \mathcal{H}_1 \leq \sup \mathcal{H}_2$ folgt:

$$\inf_{y \in H_1} y(t + \frac{2}{3}\epsilon) \leq \sup_{y \in H_2} y(t + \frac{1}{3}\epsilon) \quad \text{für alle } t \in]0, 1-\epsilon[, \text{ also}$$

$$(4) \quad \inf_{y \in H_1} a_y(t) \leq \sup_{y \in H_2} b_y(t) \quad \text{für alle } t \in]0, 1-\epsilon[.$$

Da $v|V$ schwach (A^i, A^S) - φ -stetig ist, gilt für jedes $t \in]0, 1-\epsilon[$:

$$\begin{aligned} \inf_{y \in H_1} v(y(t+\epsilon)) &\leq \inf\{v(\inf_{y \in Y_0} a_y(t)) : Y_0 \subset H_1 \text{ endlich}\} \quad (\text{wegen (3)}) \\ &\leq \sup\{v(\sup_{y \in Y_0} b_y(t)) : Y_0 \subset H_2 \text{ endlich}\} \quad (\text{wegen (1), (4)}) \\ &\leq \sup_{y \in H_2} v(y(t)) \quad (\text{wegen (2)}). \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt:

$$\int_{\epsilon}^1 \inf_{y \in H_1} v(y(t)) dt \leq \int_0^{1-\epsilon} \sup_{y \in H_2} v(y(t)) dt \quad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Hieraus folgt die Ungleichung (*).

In den beiden folgenden Sätzen werden Konsequenzen aus dem vorhergehenden Satz festgehalten.

SATZ 18.

Gilt $A^i \subset (\mathcal{C}_0)_\varphi$ und $A^S \subset (\mathcal{C}_0)^\varphi$, so sind für eine ρ -Bewertung $v|V$ und $I_v|\mathcal{L}(V)$ gemäß Theorem 12 die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $v|V$ schwach (A^i, A^S) - φ -stetig;

(ii) $I_v|\mathcal{L}(V)$ schwach $\mathcal{C}_0$ - φ -stetig.

Beweis:

1. Aus Satz 17 folgt wegen $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0^i \cap \mathcal{C}_0^s$, daß (i) die Aussage (ii) impliziert.
2. Die Gültigkeit der Umkehrung ergibt sich mit Satz 2.2 aus der Voraussetzung $A^i \subset (\mathcal{C}_0)_\varphi$ und $A^s \subset (\mathcal{C}_0)^\varphi$.

Beispiel:

A^i bzw. A^s bezeichne die Gesamtheit der abgeschlossenen bzw. der offenen Teilmengen eines topologischen Raumes X . Dann ist die Bedingung " $A^i \subset (\mathcal{C}_0)_\tau$, $A^s \subset (\mathcal{C}_0)^\tau$ " damit gleichbedeutend, daß X vollständig regulär ist.

Bemerkung:

Für die Implikation "(ii) $\rightarrow$ (i)" ist die Voraussetzung " $A^i \subset (\mathcal{C}_0)_\varphi$ und $A^s \subset (\mathcal{C}_0)^\varphi$ " wesentlich, denn es gibt zum Beispiel auf $\mathbb{N}$ eine Hausdorff-Topologie mit abzählbarer Basis derart, daß jede stetige Funktion konstant ist (siehe [S/S], Beispiel 61).

Im Spezialfall $A^i = V = A^s$ gilt $\mathcal{L}(V) = \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ und somit der

SATZ 19.

Eine ρ -Bewertung $v|V$ ist genau dann schwach φ -stetig, wenn die zugehörige ρ -Bewertung $I_v|L(V)$ schwach φ -stetig ist.

3.4. Darstellung von "Integralen" auf stetigen Ortsfunktionen

In Anlehnung an den entsprechenden topologischen Begriff wird zunächst definiert, wann ein Paar (A^i, A^s) normal ist. Die Normalität von (A^i, A^s) stellt sicher, daß es "genügend viele" bzgl. (A^i, A^s) stetige Elemente in $\mathcal{F}(W)$ gibt.

DEFINITION 20.

Es seien A^i und A^s Teilmengen von W . Dann heißt

1. (A^i, A^s) "normal", falls gilt:

- a) (i) A^i und A^s ρ -Systeme in W ;
 (ii) A^i nach unten und A^s nach oben bedingt σ -geschlossen;
 (iii) zu $a \in A^i$ (bzw. A^s) existieren $a_1, a_2 \in A^s$ (bzw. A^i) mit $a_1 \leq a \leq a_2$.
- b) Zu $a \in A^i$, $b \in A^s$ mit $a \leq b$ existieren $a_0 \in A^i$, $b_0 \in A^s$ mit $a \leq b_0 \leq a_0 \leq b$.
2. (A^i, A^s) "streng normal", falls gilt:
- a) (A^i, A^s) normal.
- b) (i) Zu $a_1, a_2 \in A^i$ und $b \in A^s$ mit $a_1 \wedge a_2 \leq b$ existieren $b_1, b_2 \in A^s$ derart, daß $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$ und $b_1 \wedge b_2 \leq b$;
 (s) zu $b_1, b_2 \in A^s$ und $a \in A^i$ mit $b_1 \vee b_2 \geq a$ existieren $a_1, a_2 \in A^i$ derart, daß $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$ und $a_1 \vee a_2 \geq a$.

Beispiel:

Sei X ein topologischer Raum.

a) Der Raum X ist genau dann normal, wenn $(f(X), g(X))$ in $W := \mathcal{P}(X)$ gemäß der vorhergehenden Definition normal ist.

b) Das Paar $(f(X), g(X))$ ist auch streng normal, wenn der Raum X normal ist, da das Komplement einer abgeschlossenen bzw. offenen Teilmenge von X offen bzw. abgeschlossen ist.

Sind nämlich $F_1, F_2 \in f(X)$ und $G \in g(X)$ mit $F_1 \cap F_2 \subset G$, so existieren $U_i \in g(X)$ ($i=1,2$) mit $F_i \cap CG \subset U_i$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, d.h. für $C_i := U_i \cup G$ gilt:

$F_i \subset G_i$ und $C_1 \cap C_2 = G$.

c) Das Paar $(f_0(X), g_0(X))$ ist stets normal, denn sind f_Z und f_P nicht-negative, stetige Funktionen auf X mit

$$Z := \{f_Z = 0\} \subset P := \{f_P > 0\},$$

so gilt für die stetige Funktion $g := f_Z \cdot (f_Z + f_P)^{-1}$ die Beziehung: $Z \subset \{g < \frac{1}{2}\} \subset \{g \leq \frac{1}{2}\} \subset P$.

$(f_0(X), \mathcal{O}_0(X))$ ist auch stets streng normal (vgl. Teil b)).

Die normalen Paare (A^i, A^S) erhalten ihre Bedeutung vor allem durch den

SATZ 21.

Sei (A^i, A^S) normal und $f \in \mathcal{C}^i(A^i, A^S)$, $g \in \mathcal{C}^S(A^i, A^S)$ mit $f \leq g$.

Dann existiert $h \in \mathcal{C}(A^i, A^S)$ mit $f \leq h \leq g$.

Beweis:

Der Beweis wird in zwei Schritten geführt. Zunächst wird gezeigt:

1. Zu $r \in]0, 1[$ und $a_0 \in A^i$, $b_0 \in A^S$ mit

$$(\alpha) \quad b_0 \geq a_0 \quad \text{und} \quad b_0 \geq \bar{f}(r), \quad g(r) \geq a_0$$

existieren $a \in A^i$, $b \in A^S$ mit

$$(\beta) \quad b_0 \wedge \bar{g}(r) \geq a \geq b \geq \underline{f}(r) \vee a_0.$$

Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $]r - \frac{1}{n_0}, r + \frac{1}{n_0}[\subset]0, 1[$. Rekursiv werden Folgen

$(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\underline{a}_n)_{n \geq 0}$ in A^i und $(\tilde{b}_n)_{n \geq 0}$, $(\underline{b}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A^S

definiert derart, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1) \quad \underline{g}(r - \frac{1}{n_0 + n}) \wedge \tilde{b}_{n-1} \geq \tilde{a}_n \geq \tilde{b}_n \\ \geq \underline{a}_n \geq \underline{b}_n \geq \underline{a}_{n-1} \vee \bar{f}(r + \frac{1}{n_0 + n}),$$

$$(2) \quad \tilde{b}_n \geq \bar{f}(r) \quad \text{und} \quad \underline{g}(r) \geq \underline{a}_n.$$

Sei $\underline{a}_0 := a_0$ und $\tilde{b}_0 := b_0$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ seien ferner $\underline{a}_0, \tilde{b}_0, \tilde{a}_1, \underline{a}_1, \tilde{b}_1, \underline{b}_1, \dots, \tilde{a}_{n-1}, \underline{a}_{n-1}, \tilde{b}_{n-1}, \underline{b}_{n-1}$ bereits konstruiert. Insbesondere gilt also $\tilde{b}_{n-1} \geq \underline{a}_{n-1}$ und

$\tilde{b}_{n-1} \geq \bar{f}(r)$, $\underline{g}(r) \geq \underline{a}_{n-1}$. Wegen $\underline{g}(r - \frac{1}{n_0 + n}) \geq \bar{f}(r + \frac{1}{n_0 + n})$

und Lemma 14 folgt damit

$$(3) \quad A^S \ni \underline{g}(r - \frac{1}{n_0 + n}) \wedge \tilde{b}_{n-1} \geq \underline{a}_{n-1} \vee \bar{f}(r + \frac{1}{n_0 + n}) \in A^i.$$

Da (A^i, A^S) normal ist, existieren Elemente $\tilde{a}_n, \underline{a}_n \in A^i$ und $\tilde{b}_n, \underline{b}_n \in A^S$, die der Bedingung (1) genügen. Aus

$$(4) \quad \underline{g}(r - \frac{1}{n_0 + n}) \wedge \tilde{b}_{n-1} \geq \underline{f}(r) \quad \text{und} \quad \underline{g}(r) \geq \underline{a}_{n-1} \vee \underline{f}(r + \frac{1}{n_0 + n})$$

und der Normalität von (A^i, A^S) folgt ferner, daß die Elemente $\tilde{a}_n, \underline{a}_n, \tilde{b}_n, \underline{b}_n$ so wählbar sind, daß zusätzlich die Bedingung (2) erfüllt ist.

Die so konstruierte Folge $(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\underline{b}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist in A^i bzw. A^S beschränkt. Es gilt also

$$(5) \quad a := \inf_{n \in \mathbb{N}} \tilde{a}_n \in A^i \quad \text{und} \quad b := \sup_{n \in \mathbb{N}} \underline{b}_n \in A^S.$$

Aus (1) folgt, daß $(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine antitone und $(\underline{b}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge ist mit $\underline{g}(r - \frac{1}{n_0 + n}) \geq \tilde{a}_n \geq \underline{b}_n \geq \underline{f}(r + \frac{1}{n_0 + n})$, d.h. aus (1) folgt

$$(6) \quad \underline{g}(r) \geq a \geq b \geq \underline{f}(r).$$

Wegen $b_0 = \tilde{b}_0 \geq \tilde{a}_1$ und $\underline{b}_1 \geq \underline{a}_0 = a_0$ gilt außerdem

$$(7) \quad b_0 \geq a \geq b \geq a_0,$$

d.h. a und b genügen der Bedingung (3).

2. Es existiert $h \in \mathcal{C}(A^i, A^S)$ mit $f \leq h \leq g$.

Auf $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ mit $D_n := \{k \cdot 2^{-n} : k \in \mathbb{N} \text{ und } k < 2^n\}$ werden rekursiv antitone Abbildungen $\bar{u}, \underline{u}$ definiert derart, daß

$$(8) \quad \bar{u}(d) \in A^i, \quad \underline{u}(d) \in A^S \quad \text{und}$$

$$(9) \quad \bar{g}(d) \geq \bar{u}(d) \geq \underline{u}(d) \geq \underline{f}(d)$$

für alle $d \in D$ gilt und außerdem

$$(10) \quad \underline{u}(d') \geq \bar{u}(d'') \quad \text{für alle } d', d'' \in D \text{ mit } d' < d''.$$

Gemäß dem ersten Beweisteil existieren $\bar{u}(\frac{1}{2}) \in A^i$ und $\underline{u}(\frac{1}{2}) \in A^S$ mit $\bar{g}(\frac{1}{2}) \geq \bar{u}(\frac{1}{2}) \geq \underline{u}(\frac{1}{2}) \geq \underline{f}(\frac{1}{2})$. Für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ seien $\bar{u}$ und $\underline{u}$ auf D_{n-1} bereits definiert. Wegen

(9) gilt dann:

$$(11) \quad \underline{u}(d') \geq \bar{f}(d) \quad \text{und} \quad \underline{g}(d) \geq \bar{u}(d'')$$

für $d \in D_n$ und $d', d'' \in D_{n-1}$ mit $d' < d < d''$.

Gemäß dem ersten Beweisteil existieren also zu $d \in D_n \setminus D_{n-1}$ Elemente $\bar{u}(d) \in A^i$ und $\underline{u}(d) \in A^S$ derart, daß neben (9) folgende Relationen gelten:

$$(12) \quad \underline{u}(d') \geq \bar{u}(d) \quad \text{für } d' \in D_{n-1} \text{ mit } d' < d, \\ \underline{u}(d) \geq \bar{u}(d'') \quad \text{für } d'' \in D_{n-1} \text{ mit } d'' > d.$$

Nach Konstruktion ist $\bar{u}$ und $\underline{u}$ eine antitone Abbildung von D nach A^i bzw. A^S . Da D in $[0,1]$ dicht liegt, ergibt sich aus (9) und (10), daß die Ortsfunktion $\bar{h} \in \mathcal{F}(W)$ mit

$$(14) \quad \bar{h}(t) := \inf\{\bar{u}(d) : t > d \in D\} \quad \text{für } t \in]0,1[$$

geeignet ist, d.h. es gilt:

$$(15) \quad f \leq h \leq g \quad \text{und} \quad h \in \mathcal{C}(A^i, A^S).$$

Dem nachstehenden Korollar entspricht in der Topologie das Lemma von Urysohn.

KOROLLAR 22.

Falls (A^i, A^S) normal ist, existiert zu $a \in A^i$ und $b \in A^S$ mit $a \leq b$ ein $h \in \mathcal{C}_0(A^i, A^S)$ mit $a \leq h \leq b$.

Beweis:

Gemäß dem vorhergehenden Satz existiert eine Ortsfunktion $h \in \mathcal{C}(A^i, A^S)$ mit $a \leq h \leq b$. Aus den Bedingungen (ii) und (iii) in Teil 1.a) der Definition 20 und Lemma 14,a) folgt: $h \in \mathcal{L}(V)$ und $A^S \ni b' \leq h \leq a' \in A^i$, d.h. $h \in \mathcal{C}_0(A^i, A^S)$.

Eine weitere Konsequenz aus Satz 21 ist

KOROLLAR 23.

Mit (A^i, A^S) ist auch $(\mathcal{C}^i(A^i, A^S), \mathcal{C}^S(A^i, A^S))$ normal und umgekehrt.

Beweis:

1. Wegen $A^i \subset \mathcal{C}^i(A^i, A^S)$ und $A^S \subset \mathcal{C}^S(A^i, A^S)$ ist die Umkehrung trivial.

2. Sei (A^i, A^S) normal. Dann ist $\mathcal{C}^i(A^i, A^S)$ bzw. $\mathcal{C}^S(A^i, A^S)$ ein bedingt nach unten bzw. oben σ -geschlossenes ρ -System, da dies für A^i bzw. A^S gilt. Daher ergibt sich die Behauptung aus Satz 21, wenn die folgende Aussage (*) gezeigt ist.

(*) Zu $h \in \mathcal{C}^i(A^i, A^S) \cup \mathcal{C}^S(A^i, A^S)$ existieren $f, g \in \mathcal{C}(A^i, A^S)$ mit $f \leq h \leq g$.

Zu $h_n := h \frac{1}{n+1}, 1$ (vgl. Bezeichnungen vor Satz 11) existieren $a_n \in A^i$ und $b_n \in A^S$ mit $h_n \leq a_n \leq b_n$ und daher gemäß Korollar 22

(1) $g_n \in \mathcal{C}(A^i, A^S)$ mit $h_n \leq a_n \leq g_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Die Ortsfunktion $g \in \mathcal{F}(W)$ mit

(2) $\bar{g}(t) := \bar{g}_1(t) \vee \dots \vee \bar{g}_n(t)$ für $t \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$

ist bzgl. (A^i, A^S) stetig, und es gilt $h \leq g$.

Analog folgt, daß ein $f \in \mathcal{C}(A^i, A^S)$ existiert mit $f \leq h$.

Bemerkung:

$(\mathcal{C}^i(A^i, A^S), \mathcal{C}^S(A^i, A^S))$ ist im allgemeinen nicht streng normal, falls (A^i, A^S) streng normal ist. Bezeichnet nämlich A^i bzw.

A^S die Gesamtheit der abgeschlossenen bzw. offenen Teilmengen

von $\mathbb{R}$ bzgl. der gewöhnlichen Topologie, so ist (A^i, A^S) in

$W := \mathcal{P}(\mathbb{R})$ streng normal (vgl. Teil b) im Beispiel zu Definition 20) und für die nach oben halbstetigen Funktionen f, g auf $\mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{für } x = \frac{m}{n} \text{ mit teilerfremden } m, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$g(x) := f(x + \pi) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

gilt: $f \wedge g = 0$. Sind f^1, g^1 nach unten halbstetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit $f \leq f^1$ und $g \leq g^1$, so gilt: $f^1 \wedge g^1 \neq 0$.

Falls A^i und A^s ρ -Systeme sind, bilden die stetigen, beschränkten Ortsfunktionen $\zeta_0(A^i, A^s)$ ein ρ -System in $\mathcal{L}(V)$. Auf dem ρ -System $\zeta_0(A^i, A^s)$ ist wiederum die Klasse der "affinen" Bewertungen von Bedeutung.

DEFINITION 24.

Seien A^i und A^s ρ -Systeme in W . Dann heißt eine ρ -Bewertung $I|_{\zeta_0(A^i, A^s)}$ "affin", wenn sie der folgenden Bedingung genügt:
 $(L_0) \quad I(h) = \alpha I(h_{0,\alpha}) + (1-\alpha)I(h_{\alpha,1}) \quad \text{für } h \in \zeta_0(A^i, A^s), \alpha \in]0,1[.$

Bemerkung:

Die Restriktion auf $\zeta_0(A^i, A^s)$ einer affinen Bewertung $I|_{\mathcal{L}(V)}$ ist gemäß Satz 11 affin.

Im Fall eines streng normalen Paares (A^i, A^s) besitzen die affinen Bewertungen auf $\zeta_0(A^i, A^s)$ eine Darstellung mittels (A^i, A^s) -regulärer Bewertungen auf $V = \rho(A^i \cup A^s)$.

THEOREM 25.

Sei (A^i, A^s) streng normal, $V = \rho(A^i \cup A^s)$ und
 $\mathcal{R}(A^i, A^s) := \{v : v|_V (A^i, A^s)\text{-reguläre } \rho\text{-Bewertung}\},$
 $\mathcal{J}(\zeta_0(A^i, A^s)) := \{I : I|_{\zeta_0(A^i, A^s)} \text{ affine } \rho\text{-Bewertung}\}.$

Dann ist durch $v|_V \mapsto I_v|_{\zeta_0(A^i, A^s)}$ mit

$$I_v(h) := \int_0^1 v(\bar{h}(t)) dt \quad \text{für } h \in \zeta_0(A^i, A^s)$$

eine bijektive Zuordnung zwischen $\mathcal{R}(A^i, A^s)$ und $\mathcal{J}(\zeta_0(A^i, A^s))$ gegeben.

Beweis:

Wegen $\zeta_0 = \zeta_0(A^i, A^s) \subset \mathcal{L}(V)$ ist I_v auf ζ_0 für alle $v \in \mathcal{R}(A^i, A^s)$ wohldefiniert. Die Abbildung $v|_V \mapsto I_v|_{\zeta_0}$ ist (A) injektiv und (B) surjektiv.

Zu (A): Es seien $v_1, v_2 \in \mathcal{R}(A^i, A^s)$ mit $v_1(c) < v_2(c)$ für ein $c \in V$. Aus der Regularität der Bewertungen v_1 und v_2

folgt, daß es $a \in A^i$, $b \in A^S$ gibt mit $a \leq b$ und $v_1(b) < v_2(a)$.

Gemäß Korollar 22 existiert $h \in \mathcal{C}_0$ mit $a \leq h \leq b$, also

$$I_{v_1}(h) < I_{v_2}(h).$$

Zu (B): Sei $I \in \mathcal{H}(\mathcal{C}_0)$ gegeben. Es wird definiert:

$$\underline{v}(a) := \inf\{I(h) : \mathcal{C}_0 \ni h \geq a\} \quad \text{für } a \in A^i,$$

$$\overline{v}(b) := \sup\{I(h) : \mathcal{C}_0 \ni h \leq b\} \quad \text{für } b \in A^S.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} (*) \quad v(c) &:= \sup\{\underline{v}(a) : A^i \ni a \leq c\} \\ &= \inf\{\overline{v}(b) : A^S \ni b \geq c\} \quad \text{für } c \in V, \end{aligned}$$

und v ist eine (A^i, A^S) -reguläre ρ -Bewertung auf V mit $I_v = I$.

1. $v|V$ gemäß (*) ist eine (A^i, A^S) -reguläre ρ -Bewertung.

a) $\underline{v}|A^i$ und $\overline{v}|A^S$ sind isoton (trivial) und reellwertig,

denn zu $c \in A^i \cup A^S$ existieren wegen der Normalität von

(A^i, A^S) Elemente $a_1, a_2 \in A^i$ und $b_1, b_2 \in A^S$ mit

$a_1 \leq b_1 \leq c \leq a_2 \leq b_2$, also gemäß Korollar 22 auch

$h_1, h_2 \in \mathcal{C}_0$ mit $h_1 \leq c \leq h_2$.

Aus Korollar 22 folgt ferner:

b) $\underline{v}(a) \leq \overline{v}(b)$ für $a \in A^i$, $b \in A^S$ mit $a \leq b$.

c) $\underline{v}_*(c) = \overline{v}^*(c)$ für $c \in A^i \cup A^S$,

denn zu $c \in A^i$ und $\varepsilon > 0$ existiert $h \in \mathcal{C}_0$ mit

$$(1) \quad h \geq c \quad \text{und} \quad I(h) < \underline{v}(c) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zu h existieren (vgl. Beweisteil a)) $f, g \in \mathcal{C}_0$ mit

$$g \geq h_{0,\alpha} \geq h_{\alpha,1} \geq f \quad \text{für alle } \alpha \in]0,1[.$$

Mit (L_0) folgt $\lim_{\alpha \rightarrow 1} (1-\alpha)I(h_{\alpha,1}) = 0$, also

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} I(h_{0,\alpha}) = I(h). \quad \text{Sei } \alpha_0 \in]0,1[\text{ mit}$$

$$(2) \quad I(h_{0,\alpha_0}) - I(h) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $b := \underline{h}(\alpha_0) \in A^S$ gilt $b \leq h_{0,\alpha_0}$ und somit wegen (1)

und (2):

(3) $b \geq c$ und

$$\bar{v}(b) \leq I(h_{0, \alpha_0}) \leq I(h) + \frac{\varepsilon}{2} < \underline{v}(c) + \varepsilon.$$

Analog folgt: $\underline{v}_*(c) = \bar{v}(c)$ für $c \in A^S$.

d) $\underline{v}|A^i$ und $\bar{v}|A^S$ sind ρ -Bewertungen.

Da $I|C_0$ eine ρ -Bewertung ist, gilt offenbar

$$(4) \quad \underline{v}(a_1 \vee a_2) + \underline{v}(a_1 \wedge a_2) \leq \underline{v}(a_1) + \underline{v}(a_2) \quad \text{für } a_1, a_2 \in A^i.$$

Zu zeigen ist also, daß $\underline{v}|A^i$ auch oberadditiv ist. Zu $a_1, a_2 \in A^i$ und $\varepsilon > 0$ existiert gemäß Teil c) ein $b \in A^S$ mit

$$(5) \quad b \geq a_1 \wedge a_2 \quad \text{und} \quad \bar{v}(b) < \underline{v}(a_1 \wedge a_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Gemäß Voraussetzung ist (A^i, A^S) streng normal. Daher folgt aus (5) und Korollar 22, daß $h_1, h_2 \in C_0$ existieren mit

$$(6) \quad h_1 \geq a_1, \quad h_2 \geq a_2 \quad \text{und} \quad h_1 \wedge h_2 \leq b;$$

$$(7) \quad I(h_1 \vee h_2) < \underline{v}(a_1 \vee a_2) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} (8) \quad \underline{v}(a_1 \vee a_2) + \underline{v}(a_1 \wedge a_2) + \varepsilon &\geq I(h_1 \vee h_2) + I(h_1 \wedge h_2) \\ &= I(h_1) + I(h_2) \\ &\geq \underline{v}(a_1) + \underline{v}(a_2). \end{aligned}$$

Analog folgt, daß $\bar{v}|A^S$ eine ρ -Bewertung ist.

Aus den Beweisteilen d) und c) erhält man:

e) $V^i := \{c \in W : \underline{v}_*(c) = \bar{v}^*(c)\}$ ist ein ρ -System mit

$A^i \cup A^S \subset V^i$, also mit $V \subset V^i$. $v|V$ gemäß (*) ist folglich eine (A^i, A^S) -reguläre ρ -Bewertung. Zu zeigen bleibt:

$$2. \quad I(h) = \int_0^1 v(\bar{h}(t)) \, dt \quad \text{für } h \in C_0.$$

Für $h \in C_0$ und $0 = \alpha_0 < \dots < \alpha_n = 1$ gilt:

$A^S \ni \underline{h}(\alpha_{i-1}) \geq h_{\alpha_{i-1}, \alpha_i} \geq \bar{h}(\alpha_i) \in A^i$ ($1 \leq i \leq n$), also

$$\begin{aligned} (9) \quad \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) v(\underline{h}(\alpha_{i-1})) &\geq \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) I(h_{\alpha_{i-1}, \alpha_i}) \\ &\geq \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) v(\bar{h}(\alpha_i)). \end{aligned}$$

Wegen $I(h) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_{i-1}) I(h_{\alpha_{i-1}, \alpha_i})$ (vgl. Teil 1. im

Beweis zu Satz 11) folgt aus (9):

$$\int_0^1 v(\underline{h}(t)) dt \geq I(h) \geq \int_0^1 v(\overline{h}(t)) dt, \text{ d.h. } I(h) = I_v(h).$$

Bemerkungen:

1. Die Voraussetzung " (A^i, A^s) streng normal" ist wesentlich, denn im Fall eines normalen Paares (A^i, A^s) ist zwar die Abbildung $v \mapsto I_v$ von $\mathcal{R}(A^i, A^s)$ nach $\mathcal{I}(\mathcal{C}_0(A^i, A^s))$ injektiv (siehe Teil (A) im Beweis des vorhergehenden Satzes), aber im allgemeinen nicht surjektiv, wie das folgende Beispiel zeigt.

Sei $W = \{0, a, b, 1\}$ der distributive Verband mit kleinstem Element 0, größtem Element 1 und nicht vergleichbaren Elementen a, b . Für $A^i := W$ und $A^s := \{0, 1\}$ gilt:

(A^i, A^s) ist normal und $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ besteht aus den Elementen der Form $h_\alpha = \alpha 1 + (1-\alpha)0$ ($\alpha \in [0, 1]$).

Die ρ -Bewertung $I|_{\mathcal{C}_0}$ mit $I(h_\alpha) := \alpha$ ist affin.

Für eine (A^i, A^s) -reguläre Abbildung v von $V = \rho(A^i \cup A^s)$ nach $\mathbb{R}$ mit $v|_{\{0, 1\}} = I|_{\{0, 1\}}$ gilt $v(a) = v(b) = v(1) = 1$ und $v(0) = 0$, d.h. $v|_V$ ist keine ρ -Bewertung.

2. Nicht jede ρ -Bewertung auf $V = \rho(A^i \cup A^s)$ ist (A^i, A^s) -regulär, falls (A^i, A^s) streng normal ist; die Abbildung $v \mapsto I_v$ von $\{v|_V : v|_V \text{ } \rho\text{-Bewertung}\}$ nach $\mathcal{I}(\mathcal{C}_0(A^i, A^s))$ ist also im allgemeinen nicht injektiv. Zum Beispiel sei W wie in der ersten Bemerkung, $A^i := \{0, a, 1\}$, $A^s := \{0, b, 1\}$ und und $v|_V$ eine ρ -Bewertung mit $v(1) > v(a) = v(b) > v(0)$. Dann ist (A^i, A^s) streng normal, aber $v|_V$ nicht (A^i, A^s) -regulär.

Über die Invarianz der Stetigkeitseigenschaften besagt

SATZ 26.

Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Theorem 25 sind unter der zusätzlichen Voraussetzung $A^i \subset (\mathcal{C}_0)_\varphi$ und $A^s \subset (\mathcal{C}_0)^\varphi$ für eine (A^i, A^s) -reguläre Bewertung $v|V$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $v|V$ schwach (A^i, A^s) - φ -stetig;
- (ii) $I_v| \mathcal{C}_0$ schwach φ -stetig.

Beweis:

Gemäß Satz 18 folgt (ii) aus (i). Die umgekehrte Implikation ergibt sich mit Satz 2.5 aus der Voraussetzung $A^i \subset (\mathcal{C}_0)_\varphi$ und $A^s \subset (\mathcal{C}_0)^\varphi$.

Bemerkung:

Gemäß Satz 2.6 ist eine (A^i, A^s) -reguläre ρ -Bewertung auf V schon schwach σ -stetig, wenn sie schwach (A^i, A^s) - σ -stetig ist.

3.5. Beispiele

In diesem Abschnitt ist W stets der Teilmengenverband einer nicht-leeren Menge X . Der Verband der $[0,1]$ -wertigen Funktionen auf X wird mit $\mathcal{F}(W)$ identifiziert, und zwar ist die Abbildung, die jeder $[0,1]$ -wertigen Funktion f auf X die Ortsfunktion $h_f \in \mathcal{F}(W)$ mit

$\bar{h}_f(t) = \{f \geq t\}$ (also $\underline{h}_f(t) = \{f > t\}$) für $t \in [0,1]$ zuordnet, ein Isomorphismus (vgl. Satz 3). Unter der zugehörigen Umkehrabbildung wird einer Ortsfunktion $h \in \mathcal{F}(W)$ die $[0,1]$ -wertige Funktion f_h zugeordnet mit

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \sup\{s \in [0,1] : x \in \bar{h}(s)\} \\ &= \sup\{s \in [0,1] : x \in \underline{h}(s)\} \quad \text{für } x \in X \quad (\sup \emptyset := 0). \end{aligned}$$

Für $A \subset X$ entspricht also der konstanten Ortsfunktion $t \mapsto A$ die charakteristische Funktion χ_A .

Beispiel A

Darstellung eines nicht-negativen, linearen Funktional auf dem Raum der stetigen Funktionen.

Aus Theorem 25 erhält man das folgende, klassische Resultat, das von Alexandroff (siehe [AF], §7, Th.1) bewiesen wurde.

SATZ

Sei X ein topologischer Raum. Dann existiert zu einem nicht-negativen, linearen Funktional $I|_{\mathcal{C}(X)}$ genau ein $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{O}_0(X))$ -regulärer Inhalt μ auf der Algebra $\mathcal{A} := \rho(\mathcal{F}_0(X) \cup \mathcal{O}_0(X))$ mit

$$I(f) = \int_X f \, d\mu \quad \text{für } f \in \mathcal{C}(X),$$

und umgekehrt.

Beweis:

1. Die Umkehrung ist trivial.

2. a) Sei $A^i := \mathcal{F}_0(X)$ und $A^s := \mathcal{O}_0(X)$. Dann ist (A^i, A^s) streng normal (vgl. Teil c) im Beispiel zu Definition 20) und $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ stellt die stetigen, $[0,1]$ -wertigen Funktionen auf X dar, denn eine Funktion f auf X ist genau dann stetig, wenn $\{f > t\} \in \mathcal{O}_0(X)$ und $\{f \geq t\} \in \mathcal{F}_0(X)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

b) Sei I_0 die Restriktion von I auf $\mathcal{C}_0$. Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}_0$ gilt:

$$f_{0,\alpha} = \frac{f}{\alpha} \wedge 1 \quad \text{und} \quad f_{\alpha,1} = \frac{f-\alpha}{1-\alpha} \vee 0 \quad \text{für } \alpha \in]0,1[,$$

$$\text{denn } \left\{ \left(\frac{f}{\alpha} \wedge 1 \right) \geq t \right\} = \{f \geq \alpha t\} \quad \text{und}$$

$$\left\{ \left(\frac{f-\alpha}{1-\alpha} \vee 0 \right) \geq t \right\} = \{f \geq \alpha + (1-\alpha)t\} . \quad \text{Wegen}$$

$$f = \alpha \left(\frac{f}{\alpha} \wedge 1 \right) + (1-\alpha) \left(\frac{f-\alpha}{1-\alpha} \vee 0 \right)$$

folgt aus der Linearität von $I|_{\mathcal{C}(X)}$:

$$I_0|_{\mathcal{C}_0} \text{ ist affin mit } I_0(0) = 0 .$$

c) Gemäß Theorem 25 existiert zu $I_0|_{\mathcal{C}_0}$ genau eine σ -Bewertung $\mu|_{\mathcal{A}}$ mit

$$I_0(f) = \int_0^1 \mu(\{f \geq t\}) dt \quad \text{für } f \in \mathcal{C}_0.$$

Wegen $\mu(\emptyset) = I_0(0) = 0$ ist $\mu|_{\mathcal{A}}$ ein Inhalt und es gilt:

$$I(f) = \int_X f d\mu \quad \text{für } f \in \mathcal{C}(X).$$

Bemerkung:

Eine affine ρ -Bewertung $I_0|_{\mathcal{C}_0}$ mit $I_0(0) = 0$ ist linear, d.h. es gilt: $I_0(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I_0(f_1) + \alpha_2 I_0(f_2)$ für $f_i \in \mathcal{C}_0$, $0 \leq \alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i=1,2$) mit $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{C}_0$, denn zu $I_0|_{\mathcal{C}_0}$ existiert gemäß Theorem 25 genau ein Inhalt $\mu|_{\mathcal{A}}$ mit $I_0(f) = \int_X f d\mu$ für $f \in \mathcal{C}_0$. $I_0|_{\mathcal{C}_0}$ besitzt also genau eine lineare Fortsetzung $I|_{\mathcal{C}(X)}$.

Beispiel E

Darstellung eines nicht-negativen, linearen Funktional auf dem Raum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger.

SATZ

Sei X ein lokal-kompakter Raum. Dann existiert zu jedem nicht-negativen, linearen Funktional I auf $\mathcal{K}(X)$ genau ein Radon-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ (vgl. Definition in Abschnitt 2.4, Beispiel E) mit

$$I(f) = \int_X f d\mu \quad \text{für } f \in \mathcal{K}(X),$$

und umgekehrt.

Beweis:

1. Die Umkehrung ist trivial.

2. a) Sei $A^i := \mathcal{K}(X)$ und $A^s := \{G \in \mathcal{O}(X) : G^a \text{ kompakt}\}$.

Dann ist das Paar (A^i, A^s) streng normal, da ein kompakter Raum normal ist (vgl. Teil b) im Beispiel zu Definition 20).

$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ stellt die $[0,1]$ -wertigen Funktionen mit

kompaktem Träger dar, denn zu $f \in \mathcal{C}_0$ existiert definitions-
gemäß eine Menge $K \in \mathcal{K}(X)$ mit $f \in \chi_K$.

b) Aus Theorem 25 folgt wie in den Beweisteilen b) und c) von
Beispiel A, daß genau ein (A^i, A^s) -regulärer Inhalt ν auf
 $\mathcal{A} := \rho(A^i \cup A^s)$ existiert mit

$$I(f) = \int_X f d\nu \quad \text{für } f \in \mathcal{K}(X) .$$

c) Zu $\nu|_{\mathcal{A}}$ existiert genau ein Radon-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ mit
 $\mu|_{\mathcal{A}} = \nu$, also

$$\mu(B) = \sup\{\nu(K) : \mathcal{K}(X) \ni K \subset B\} \quad \text{für } B \in \mathcal{L}(X) ,$$

denn wegen der (A^i, A^s) -Regularität von $\nu|_{\mathcal{A}}$ ist $\nu|_{\mathcal{K}(X)}$
ein straffer Inhalt (siehe Beispiel E im Abschnitt 2.4). _____]

Teil III Schwache Topologie

§4. Grundlegende Eigenschaften

4.1. Definition der Topologie

Die schwache Topologie wird auf dem Raum der additiven und isotonen, reellwertigen Abbildungen auf V betrachtet, d.h. auf dem Raum aller ρ -Bewertungen auf V , sowie auf den Unterräumen, die durch die Stetigkeitseigenschaften der Bewertungen charakterisiert sind. Zur Definition der Unterräume wird die Eigenschaft der schwachen Stetigkeit benutzt (siehe Definition 2.1), da V im allgemeinen nicht die für die Stetigkeit gemäß Definition 1.3 notwendige Abgeschlossenheitseigenschaft besitzt.

DEFINITION 1.

$$\mathcal{W}_\rho(V) := \{v \mid V : v \mid V \text{ } \rho\text{-Bewertung}\};$$

$$\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^s) := \{v \mid V : v \mid V \in \mathcal{W}_\rho(V) \text{ schwach } (A^i, A^s)\text{-}\varphi\text{-stetig}\};$$

$$\mathcal{W}_\varphi(V; A) := \mathcal{W}_\varphi(V; A, A) \quad \text{falls } A^i = A = A^s;$$

$$\mathcal{W}_\varphi(V) := \mathcal{W}_\varphi(V; V).$$

Es ist also $\mathcal{W}_\rho(V) = \mathcal{W}_\rho(V; \emptyset)$ und $\mathcal{W}_\sigma(V) = \mathcal{W}_\tau(V; \emptyset)$.

Die Unterräume $\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^s)$ sind von Interesse, weil die schwache Topologie in Abhängigkeit von (A^i, A^s) definiert wird.

DEFINITION 2.

$\tau(A^i, A^s)$ bezeichnet die "schwache Topologie bzgl. (A^i, A^s) in $\mathcal{W}_\rho(V)$ ", d.h. $\tau(A^i, A^s)$ ist die grösste Topologie auf $\mathcal{W}_\rho(V)$, bzgl. der die Abbildungen

$$a : v \mapsto v(a) \quad \text{für } v \in \mathcal{W}_\rho(V)$$

(i) für alle $a \in A^i$ nach oben halbstetig und

(s) für alle $a \in A^s$ nach unten halbstetig sind.

Die von $\tau(A^i, A^s)$ auf Unterräumen induzierte Topologie wird ebenfalls mit $\tau(A^i, A^s)$ bezeichnet. Im Fall $A^i = A = A^s$ wird abkürzend $\tau(A)$ statt $\tau(A, A)$ geschrieben.

Bemerkung:

Sei $A^i \neq \emptyset \neq A^S$. Eine Subbasis für den Umgebungsfilter von $v_0 \in \mathcal{W}_\rho(V)$ bilden die Mengen

$$G(v_0, \epsilon, a, b) := \{v \in \mathcal{W}_\rho(V) : v(a) < v_0(a) + \epsilon\} \\ \cap \{v \in \mathcal{W}_\rho(V) : v(b) > v_0(b) - \epsilon\}$$

mit $\epsilon > 0$, $a \in A^i$, $b \in A^S$.

Unmittelbar aus der vorhergehenden Definition ergibt sich

LEMMA 3.

Ein Netz $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $\mathcal{W}_\rho(V)$ konvergiert bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^S)$ genau dann gegen ein Element $v \in \mathcal{W}_\rho(V)$, wenn gilt:

- (i) $\limsup_{\alpha \in I} v_\alpha(a) \leq v(a)$ für alle $a \in A^i$ und
 (s) $\liminf_{\alpha \in I} v_\alpha(a) \geq v(a)$ für alle $a \in A^S$.

Bemerkung:

Im Fall $A^i = A = A^S$ ist $\mathcal{T}(A)$ die grösste Topologie, bzgl. der die Abbildungen $\hat{a}$ für $a \in A$ stetig sind, und ein Netz $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $\mathcal{W}_\rho(V)$ konvergiert genau dann gegen ein Element $v \in \mathcal{W}_\rho(V)$, wenn $\lim_{\alpha \in I} v_\alpha(a) = v(a)$ für alle $a \in A$ gilt. Insbesondere liegt im Fall $A^i = V = A^S$ die Topologie der punktweisen Konvergenz vor.

$\mathcal{W}_\rho(V)$ ist bzgl. der punktweisen Addition eine topologische Halbgruppe und enthält für jedes $t \in \mathbb{R}$ die konstante Bewertung $t : a \mapsto t$ für $a \in V$.

SATZ 4.

Sei a ein Element in $A^i \cap A^S$, $\mathcal{W}$ ein bzgl. Addition von Konstanten geschlossener Unterraum von $(\mathcal{W}_\rho(V), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ und $\mathcal{W}_a := \{v : v \in \mathcal{W} \text{ mit } v(a) = 0\}$. Dann ist $f : (v, t) \mapsto v + t$ ein Homöomorphismus von $\mathcal{W}_a \times \mathbb{R}$ nach $\mathcal{W}$.

Beweis:

Die Stetigkeit der Umkehrabbildung $f^{-1}: v \mapsto (v-v(a), v(a))$ ergibt sich aus der Stetigkeit der Abbildung $v \mapsto v(a)$. □

KOROLLAR 5.

Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen von Satz 4 gilt: Von $\mathcal{M}_a^0$ auf $\mathcal{M}^0$ sind alle topologischen Eigenschaften übertragbar, die bei Produktbildung mit $\mathbb{R}$ erhalten bleiben, wie zum Beispiel "lokal-kompakt", " σ -kompakt", "(vollständig) metrisierbar", "Existenz einer abzählbaren Basis".

Jedes Element aus $(A^i)_\varphi \cup (A^S)^\varphi$ definiert auf $\mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S)$ eine halbstetige Abbildung:

LEMMA 6.

Für $a \in (A^i)_\varphi$ ist $v \mapsto v^*(a)$ eine nach oben halbstetige Abbildung von $(\mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ nach $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Die duale Aussage gilt ebenfalls.

Beweis:

Da A^i nach unten ρ -geschlossen ist, existiert zu $a \in (A^i)_\varphi$ eine absteigend gerichtete Familie $U \subset A^i$ mit $|U| \leq \varphi$ und $a = \inf U$. Wegen Lemma 2.9 gilt:

$$v^*(a) = \inf_{u \in U} \hat{0}(v) \quad \text{für } v \in \mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S),$$

d.h. $v \mapsto v^*(a)$ ist nach oben halbstetig. □

Die nachstehenden Sätze 7 und 8 enthalten unmittelbare Folgerungen aus Lemma 6.

SATZ 7.

Für $B^i := (A^i)_\varphi \cap V$ und $B^S := (A^S)^\varphi \cap V$ ist die Topologie $\mathcal{T}(B^i, B^S)$ auf $\mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S)$ mit $\mathcal{T}(A^i, A^S)$ identisch.

SATZ 8.

$(\mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ besitzt eine abzählbare Basis, falls abzählbare Teilmengen $A_O^i \subset A^i$, $A_O^S \subset A^S$ existieren mit $A^i \subset (A_O^i)_\sigma$, $A^S \subset (A_O^S)^\sigma$.

4.2. Stetige Funktionen auf $\mathcal{W}_\rho^0(V)$

Stetige, reellwertige Funktionen auf $(\mathcal{W}_\rho^0(V), \gamma(A^i, A^S))$ werden außer durch konstante Ortsfunktionen $a \in A^i \cap A^S$ auch durch stetige Ortsfunktionen $h \in \mathcal{C}_0^i(A^i, A^S)$ definiert.

LEMMA 9.

Sei $h \in \mathcal{C}_0^i(A^i, A^S)$ und $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Netz in $\mathcal{W}_\rho^0(V)$, das bzgl. $\gamma(A^i, A^S)$ gegen $v \in \mathcal{W}_\rho^0(V)$ konvergiert.

Dann gilt für $y \in h \cap V^{[0,1]}$ die Beziehung:

$$\limsup_{\alpha \in I} v_\alpha(y(t)) \neq v(y(t)) \text{ bis auf abzählbar viele } t \in [0,1].$$

Die duale Aussage gilt ebenfalls.

Beweis:

Wegen $h \in \mathcal{C}_0^i(A^i, A^S)$ existiert zu einer linksseitigen Stetigkeitsstelle $s \in]0,1[$ der antitonen Funktion $t \mapsto v(y(t))$ und $\epsilon > 0$ ein Element

$$a \in A^i \text{ mit } a \geq y(s) \text{ und } v(a) - v(y(s)) < \epsilon.$$

Daraus folgt:

$$\limsup_{\alpha \in I} v_\alpha(y(s)) \neq \limsup_{\alpha \in I} v_\alpha(a) \neq v(a) \neq v(y(s)) + \epsilon.$$

Für $v \in \mathcal{W}_\rho^0(V)$ sei im folgenden I_v die zugehörige Bewertung auf $\mathcal{L}(V)$ gemäß Theorem 3.12.

SATZ 10.

Für eine Ortsfunktion $h \in \mathcal{C}_0^i(A^i, A^S)$ ist $v \mapsto I_v(h)$ eine nach oben halbstetige Abbildung von $(\mathcal{W}_\rho^0(V), \gamma(A^i, A^S))$ nach $\mathbb{R}$.

Die duale Aussage gilt ebenfalls.

Beweis:

Sei $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Netz in $\mathcal{W}_\rho^0(V)$, das bzgl. $\gamma(A^i, A^S)$ gegen $v \in \mathcal{W}_\rho^0(V)$ konvergiert. Wegen $h \leq a$ für ein $a \in A^i$ kann ohne Einschränkung angenommen werden:

$$(1) \quad \sup_{\alpha \in I} v_\alpha(y(t)) \neq \bar{\gamma} \in \mathbb{R} \quad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Für $\alpha \in I$ und $t \in [0,1]$ sei $g_\alpha(t) := \sup_{\beta \geq \alpha} v_\beta(y(t))$. Mit (1) erhält man:

(2) $\left\{ \begin{array}{l} \{g_\alpha : \alpha \in I\} \text{ ist eine absteigend gerichtete Familie} \\ \text{von reellwertigen, antitonen Funktionen auf } [0,1]. \end{array} \right.$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \inf_{\alpha \in I} \sup_{\beta \geq \alpha} \int_0^1 v_\beta(y(t)) dt &\leq \inf_{\alpha \in I} \int_0^1 g_\alpha(t) dt \\ &= \int_0^1 \inf_{\alpha \in I} g_\alpha(t) dt \quad (\text{wegen (2) und Lemma 3.16}) \\ &\leq \int_0^1 v(y(t)) dt \quad (\text{Lemma 9}), \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \limsup_{\alpha \in I} I_{v_\alpha}(h) \leq I_v(h).$$

Aus Satz 10 folgt wegen $A^i \subset \mathcal{C}_0^i = \mathcal{C}_0^i(A^i, A^S)$ und $A^S \subset \mathcal{C}_0^S = \mathcal{C}_0^S(A^i, A^S)$ der

SATZ 11.

$\mathcal{I}(\mathcal{L}(V)) := \{I|\mathcal{L}(V) : I|\mathcal{L}(V) \text{ affine } \rho\text{-Bewertung}\}$ sei mit der schwachen Topologie $\mathcal{I}(\mathcal{C}_0^i, \mathcal{C}_0^S)$ versehen. Dann ist die in Theorem 3.12 angegebene Abbildung von $(\mathcal{W}_\rho(V), \mathcal{I}(A^i, A^S))$ nach $(\mathcal{I}(\mathcal{L}(V)), \mathcal{I}(\mathcal{C}_0^i, \mathcal{C}_0^S))$ ein Homöomorphismus.

Die stetigen Ortsfunktionen erhalten ihre Bedeutung für die schwache Topologie durch den folgenden Satz, der eine Folgerung aus Satz 11 darstellt.

SATZ 12.

Für eine Ortsfunktion $h \in \mathcal{C}_0^i(A^i, A^S)$ ist $v \mapsto I_v(h)$ eine stetige Abbildung von $(\mathcal{W}_\rho(V), \mathcal{I}(A^i, A^S))$ nach $\mathbb{R}$.

Auf $\mathcal{W}_\rho(V)$ wird auch die folgende Topologie betrachtet.

DEFINITION 13.

$\mathcal{I}^i(A^i, A^S)$ bezeichnet die grösste Topologie auf $\mathcal{W}_\rho(V)$, bzgl. der die Abbildungen $v \mapsto I_v(h)$ von $\mathcal{W}_\rho(V)$ nach $\mathbb{R}$ für alle $h \in \mathcal{C}_0^i(A^i, A^S)$ stetig sind.

Der vorhergehende Satz besagt, daß die Topologie $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ größer ist als $\mathcal{T}(A^i, A^s)$. Klassische Beispiele zeigen, daß im allgemeinen auch $\mathcal{T}(A^i, A^s) \neq \mathcal{T}(A^i, A^s)$ gilt (vgl. Bemerkung zu Satz 3.18). Gleichheit gilt in den folgenden Fällen:

SATZ 14.

- a) Falls (A^i, A^s) normal ist, stimmen die Topologien $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ und $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ auf $\mathcal{R}(V; A^i, A^s) = \{v: v \in \mathcal{W}_\rho^0(V) \text{ } (A^i, A^s)\text{-regulär}\}$ überein.
- b) Falls A^i und A^s ρ -Systeme sind mit $A^i \subset (\mathcal{C}_0)_\varphi$ und $A^s \subset (\mathcal{C}_0)^\varphi$, stimmen die Topologien $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ und $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ auf $\mathcal{W}_\varphi^0(V; A^i, A^s)$ überein.

Beweis:

Zu a): Aus der Regularität der Bewertungen und Korollar 3.22 folgt, daß zu $v \in \mathcal{R}(V; A^i, A^s)$, $a \in A^i$ und $\varepsilon > 0$ ein Element $h \in \mathcal{C}_0$ existiert mit

$$h \geq a \quad \text{und} \quad I_v(h) < v(a) + \varepsilon.$$

Also gilt:

$$\hat{a}(v) = v(a) = \inf_{a \in h \in \mathcal{C}_0} I_v(h) \quad \text{für } v \in \mathcal{R}(V; A^i, A^s),$$

d.h. $\hat{a}$ ist bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ auf $\mathcal{R}(V; A^i, A^s)$ nach oben halbstetig. Analog folgt, daß $\hat{a}$ für $a \in A^s$ auf $\mathcal{R}(V; A^i, A^s)$ nach unten halbstetig ist.

Zu b): $\mathcal{C}_0$ ist ein ρ -System in $\mathcal{L}(V)$ und für $v \in \mathcal{W}_\varphi^0(V; A^i, A^s)$ ist $I_v|_{\mathcal{L}(V)}$ gemäß Satz 3.18 schwach $\mathcal{C}_0$ - φ -stetig. Daher ergibt sich die Behauptung aus Lemma 6.

Für den Raum der affinen Bewertungen auf $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$, versehen mit der schwachen Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{C}_0)$, hat die Aussage a) von Satz 14 zur Konsequenz:

SATZ 15.

Sei (A^i, A^s) streng normal, $V = \rho(A^i \cup A^s)$ und

$\mathcal{R}(A^i, A^s) = \{v : v|_V (A^i, A^s)\text{-reguläre } \rho\text{-Bewertung}\},$

$\mathcal{I}(\mathcal{C}_0) = \{I : I|_{\mathcal{C}_0} \text{ affine } \rho\text{-Bewertung}\}.$

Dann ist die in Theorem 3.25 angegebene Abbildung von

$(\mathcal{R}(A^i, A^s), \mathcal{I}(A^i, A^s))$ nach $(\mathcal{I}(\mathcal{C}_0), \mathcal{I}(\mathcal{C}_0))$ ein Homöomorphismus.

4.3. Trennbarkeitseigenschaften

In diesem Abschnitt werden Unterräume von $\mathcal{W}_\rho(V)$ auf Separiertheit und Regularität hin untersucht.

DEFINITION 16.

Ist $\mathcal{W}$ ein Unterraum von $\mathcal{W}_\rho(V)$, so heißt eine Menge $B \subset V$

" $\mathcal{W}$ -trennend", falls es zu verschiedenen ρ -Bewertungen

$v_1, v_2 \in \mathcal{W}$ ein $b \in B$ gibt mit $v_1(b) \neq v_2(b)$.

Bemerkung:

Für einen Unterraum $\mathcal{W}$ von $\mathcal{W}_\rho(V)$ ist $B \subset V$ $\mathcal{W}$ -trennend,

falls jede ρ -Bewertung aus $\mathcal{W}$ (B, V) -regulär oder (V, B) -regulär ist.

Darüber hinaus gilt der

SATZ 17.

Eine nach unten oder oben ρ -geschlossene Teilmenge B von V mit $V \subset \sigma(B)$ ist $\mathcal{W}_\sigma(V)$ -trennend.

Beweis:

Gemäß Satz 1.8 genügt es zu zeigen, daß $\rho(B)$ $\mathcal{W}_\sigma(V)$ -trennend ist. Sei $v \in \mathcal{W}_\sigma(V)$. Die gemäß Korollar 2.15 zu $v|_V$ existierende Fortsetzung $w|_L$ ist auch eine Fortsetzung von $v|_{\rho(B)}$ mit $L \subset \sigma(V)$. Nach Voraussetzung gilt $V \subset \sigma(B)$, also $L \subset \sigma(B)$. Aus der Eindeutigkeit einer solchen Fortsetzung (siehe Korollar 2.15) folgt, daß $v|_V$ durch $v|_{\rho(B)}$ eindeutig bestimmt ist. □

Zunächst wird nun der Fall " $A^i = A^S$ " betrachtet.

SATZ 18.

Für $A^i = A = A^S$ gilt:

1. $(\mathcal{H}_\rho(V), \mathcal{F}(A))$ ist vollständig regulär;
2. Ein Unterraum $(\mathcal{H}_\rho, \mathcal{F}(A))$ von $(\mathcal{H}_\rho(V), \mathcal{F}(A))$ ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn A $\mathcal{H}_\rho^2$ -trennend ist.

Beweis:

Die Topologie $\mathcal{F}(A)$ wird erzeugt durch die Familie der Pseudometriken d_a , $a \in A$, mit $d_a(v, w) := |v(a) - w(a)|$ für $v, w \in \mathcal{H}_\rho(V)$. Folglich ist $(\mathcal{H}_\rho(V), \mathcal{F}(A))$ vollständig regulär (vgl. [KY], p.188). Die zweite Behauptung ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen.

Mit Hilfe des vorhergehenden Satzes wird gezeigt

SATZ 19.

a) Sei (A^i, A^S) normal und

$\mathcal{R}(V; A^i, A^S) = \{v : v \in \mathcal{H}_\rho(V) \text{ } (A^i, A^S)\text{-regulär}\}$. Dann ist $(\mathcal{R}(V; A^i, A^S), \mathcal{F}(A^i, A^S))$ ein vollständig regulärer Hausdorff-Raum.

b) A^i und A^S seien ρ -Systeme mit $A^i \subset (\mathcal{C}_0)_\Phi$, $A^S \subset (\mathcal{C}_0)^\Phi$.

Dann ist $(\mathcal{H}_\rho(V; A^i, A^S), \mathcal{F}(A^i, A^S))$ vollständig regulär.

Beweis:

Sei $\mathcal{H}_1 := \mathcal{R}(V; A^i, A^S)$ und $\mathcal{H}_2 := \mathcal{H}_\rho(V; A^i, A^S)$. Gemäß Theorem 3.12 und Satz 14 ist $(\mathcal{H}_1, \mathcal{F}(A^i, A^S))$ homöomorph zu $(\{I_v : v \in \mathcal{H}_1\}, \mathcal{F}(\mathcal{C}_0))$ ($i=1,2$). Ferner ist $\mathcal{C}_0$ gemäß Korollar 3.22 $\{I_v : v \in \mathcal{H}_1\}$ -trennend. Somit ergibt sich die Behauptung aus Satz 18.

Bemerkungen:

1. Auch im Fall eines streng normalen Paares (A^i, A^S) mit $V = \rho(A^i \cup A^S)$ ist $(\mathcal{H}_\rho(V), \mathcal{F}(A^i, A^S))$ im allgemeinen weder

vollständig regulär noch ein Hausdorff-Raum, denn

- a) es existiert ein streng normales Paar (A^i, A^s) mit einer nicht (A^i, A^s) -regulären Bewertung $v|V$ (siehe erstes Beispiel zu Definition 2.1; auf einem kompakten Raum X ist wegen $f(X) = \tilde{\mathcal{R}}(X)$ die Restriktion eines nicht τ -stetigen Borel-Maßes auf $\rho(f(X) \cup \mathcal{O}_f(X))$ nicht $(f(X), \mathcal{O}_f(X))$ -regulär);
- β) zu einer nicht (A^i, A^s) -regulären Bewertung $v|V$ existiert gemäß Theorem 3.25 eine (A^i, A^s) -reguläre Bewertung $w|V$ mit $w(a) \geq v(a)$ für $a \in A^i$ und $w(b) \leq v(b)$ für $b \in A^s$, d.h. jede Umgebung von w enthält das Element v .
- Andererseits existiert wegen $v \not\leq w$ ein $a \in A^i$ bzw. $a \in A^s$ mit $v(a) \not\leq w(a)$, d.h. v besitzt eine Umgebung, die w nicht enthält. $(\mathcal{M}_0(V), \gamma(A^i, A^s))$ ist also weder ein Hausdorff-Raum noch regulär.

2. Für ein normales Paar (A^i, A^s) ist der Raum

$(\mathcal{R}(V; A^i, A^s), \gamma(A^i, A^s))$ nicht notwendig normal, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel:

$X := \mathbb{R}^2$ ist mit der Sorgenfrey-Topologie (vgl. [S/S], Ex.84) ein vollständig regulärer und nicht normaler Hausdorff-Raum, der dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt. Für $A^i := f_0^-(X)$ und $A^s := \mathcal{O}_0(X)$ ist das Paar (A^i, A^s) normal (vgl. Teil c) im Beispiel zu Definition 20) und wegen $\{x\} \in f_0^-(X)$ für $x \in X$ ist X bzgl. der Einbettung $x \mapsto \delta_x$ ein abgeschlossener, nicht normaler Unterraum von $\mathcal{R}(V; A^i, A^s)$.

Um die Voraussetzung in dem folgenden Satz abzuschwächen, werden die Mengen A^i, A^s geeignet vergrößert.

DEFINITION 20.

Für $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\rho(V)$ sei

$A_{\mathcal{M}}^i := \{a \in V : a \text{ auf } \mathcal{M} \text{ bzgl. } \gamma(A^i, A^S) \text{ nach oben halbstetig}\};$

$A_{\mathcal{M}}^S := \{a \in V : a \text{ auf } \mathcal{M} \text{ bzgl. } \gamma(A^i, A^S) \text{ nach unten halbstetig}\}.$

Bemerkung:

Gemäß Satz 7 gilt: $(A^i)_\emptyset \cap V \subset A_{\mathcal{M}}^i$ und $(A^S)_\emptyset \cap V \subset A_{\mathcal{M}}^S$
für alle $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\rho(V; A^i, A^S)$.

Der folgende Satz gibt ein Kriterium dafür an, daß ein Unterraum von $\mathcal{M}_\rho(V)$ ein T_1 -Raum ¹⁾ ist.

SATZ 21.

$\mathcal{M}$ sei eine Teilmenge von $\mathcal{M}_\rho(V)$ derart, daß jede Bewertung $v \in \mathcal{M}$ $(A_{\mathcal{M}}^i, A_{\mathcal{M}}^S)$ -regulär ist.

Dann ist $(\mathcal{M}, \gamma(A^i, A^S))$ ein T_1 -Raum.

Beweis:

Zu $v_1, v_2 \in \mathcal{M}$ und $a \in V$ mit $v_1(a) < v_2(a)$ existieren gemäß Voraussetzung Elemente $a^i \in A_{\mathcal{M}}^i$, $a^S \in A_{\mathcal{M}}^S$ mit
 $v_1(a^i) < v_2(a^i)$ und $v_1(a^S) < v_2(a^S)$.

Daher sind

$G_1 := \{v \in \mathcal{M} : v(a^i) < v_2(a^i)\}$ und

$G_2 := \{v \in \mathcal{M} : v(a^S) > v_1(a^S)\}$ offene Teilmengen von $\mathcal{M}$

mit $v_1 \in G_1$, $v_2 \notin G_1$ und $v_2 \in G_2$, $v_1 \notin G_2$.

Bemerkung:

Wie die folgenden Beispiele zeigen, stellt die $(A_{\mathcal{M}}^i, A_{\mathcal{M}}^S)$ -Regularität der Bewertungen aus $\mathcal{M}$ weder eine hinreichende noch notwendige Bedingung für die Separiertheit von $(\mathcal{M}, (A^i, A^S))$ dar.

¹⁾ Ein topologischer Raum heißt T_1 -Raum, wenn jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.

Beispiele:

1. Auf $X := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit der gewöhnlichen Topologie wird die Familie der straffen Borel-Maße betrachtet; sei also $\mathcal{W} := \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{V} := \mathcal{L}(X)$, $A^i := \mathcal{L}(X)$ und $A^s := \mathcal{Q}(X)$. Dann ist der Raum $\mathcal{M}$ der (A^i, A^s) -regulären Borel-Maße auf X , versehen mit der schwachen Topologie $\mathcal{T}(A^i, A^s)$, kein Hausdorff-Raum, denn zwei nicht-leere, offene Teilmengen U_1, U_2 von $\mathcal{M}$ besitzen stets auch einen nicht-leeren Durchschnitt:

Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß

$$U_j = \bigcap_{1 \leq k \leq n} \{ \mu \in \mathcal{M} : \mu(G_{jk}) > \alpha_{jk}, \mu(K_{jk}) < \beta_{jk} \} \quad (j=1,2)$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{jk} \in \mathbb{R}$, $0 < \beta_{jk} \in \mathbb{R}$, $\emptyset \neq G_{jk} \in \mathcal{Q}(X)$ und $K_{jk} \in \mathcal{L}(X)$

($1 \leq k \leq n$) gilt. Da die Menge $K := \bigcup_{1 \leq k \leq n} (K_{1k} \cup K_{2k})$ in X

kompakt ist, also keine nicht-leere offene Teilmenge ent-

hält, existieren Elemente $x_{jk} \in G_{jk} \setminus K$. Das straffe

Borel-Maß $\mu := \alpha \cdot \sum_{j,k} \delta_{x_{jk}}$ mit $\alpha > \max_{j,k} \alpha_{jk}$

ist dann ein Element von U_1 und U_2 .

2. Sei $X := \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Topologie und $\mathcal{V}$ das von $\mathcal{L}(X)$ und χ_Q im Verband $\mathcal{W} := \widehat{\mathbb{R}}^X$ erzeugte ρ -System. Mit $A := \mathcal{L}(X)$ ist $\mathcal{M} := \mathcal{M}_\sigma^{\mathcal{V}}$ bzgl. $\mathcal{T}(A)$ ein Hausdorff-Raum (siehe Satz 17 und Satz 18.2.), aber für $x \in X$ ist die Bewertung $\delta_x : \mathcal{V} \ni g \mapsto g(x)$ ein nicht $(A_{\mathcal{M}}^i, A_{\mathcal{M}}^s)$ -reguläres Element in $\mathcal{M}$, denn es gilt

$$(*) \quad A_{\mathcal{M}}^i = \mathcal{L}(X) = A_{\mathcal{M}}^s,$$

also $\delta_x(h) - \delta_x(g) \geq 1$ für $A_{\mathcal{M}}^i \ni g \leq \chi_Q \leq h \in A_{\mathcal{M}}^s$.

Die Aussage (*) ergibt sich folgendermaßen:

Aus der Stetigkeit der Abbildung $\eta : x \mapsto \delta_x$ folgt:

$$\{x \in X : g(x) < \alpha\} = \eta^{-1}(\{v \in \mathcal{M} : v(g) < \alpha\}) \in \mathcal{Q}(X) \quad \text{für } g \in A_{\mathcal{M}}^i, \alpha \in \mathbb{R};$$

und $\{x \in X : g(x) > \alpha\} \in \mathcal{G}(X)$ für $g \in A_{\mathcal{G}}^S$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

also $A_{\mathcal{G}}^i \subset \mathcal{C}^i(X)$ und $A_{\mathcal{G}}^S \subset \mathcal{C}^S(X)$. Wegen

$V = \{ \langle g, x_Q, h \rangle : g, h \in \mathcal{C}(X) \}$ sind aber die halbstetigen Funktionen in V stetig.

$\mathcal{W}_G(V)$ und $\mathcal{W}_T(V; A^i, A^S)$ sind T_1 -Räume, falls V in bezug auf A^i und A^S nicht "zu groß" ist:

SATZ 22.

A^i und A^S seien ρ -Systeme. Dann ist

- a) $(\mathcal{W}_G(V), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ ein T_1 -Raum,
falls $V \subset \sigma(A^i) \cap \sigma(A^S)$ gilt;
- b) $(\mathcal{W}_T(V; A^i, A^S), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ ein T_1 -Raum,
falls $V \subset \sigma(B^i) \cap \sigma(B^S)$
für $B^i = (A^i)_T \cap V$ und $B^S = (A^S)_T \cap V$ gilt.

Beweis:

Es ist nur Aussage a) zu zeigen, da sich b) mittels Satz 7 aus Teil a) ergibt.

1. Sei $v \in \mathcal{W}_G(V)$ und $w|L$ die σ -stetige Fortsetzung von $v|V$ gemäß Korollar 2.15. Es gilt also

$$w(a) = v^*(a) \text{ für } a \in V_G \cap L \text{ und } w(a) = v_*(a) \text{ für } a \in V^\sigma \cap L.$$

Wegen $L \subset \sigma(A^i) \cap \sigma(A^S)$ folgt aus Satz 1.19, daß $w|L$ $((A^i)_G \cap L, (A^S)^\sigma \cap L)$ -regulär ist.

2. Zu $v_1, v_2 \in \mathcal{W}_G(V)$ und $a \in V$ mit $v_1(a) < v_2(a)$ existieren gemäß dem ersten Beweisteil Elemente $a^i \in (A^i)_G$, $a^S \in (A^S)^\sigma$ mit

$$\mathbb{R} \ni (v_1)^*(a^i) < (v_2)^*(a^i) \text{ und } (v_1)_*(a^S) < (v_2)_*(a^S) \in \mathbb{R}.$$

Nach Lemma 6 ist die Abbildung $v \mapsto v^*(a^i)$ bzw.

$v \mapsto v_*(a^S)$ nach oben bzw. unten halbstetig. Ebenso wie im Beweis zu Satz 18 folgt daraus die Behauptung. □

Die Paare (A^i, A^S) , die der folgenden Regularitätsbedingung genügen, sind auch im Paragraphen 6 von Bedeutung.

DEFINITION 23.

Ein Paar (A^i, A^S) heißt " φ -regulär", falls A^i und A^S ρ -Systeme in W sind, für die gilt:

- (i) zu jedem $a \in A^i$ existiert $B_a^i \subset A^i$ mit $|B_a^i| \leq \varphi$ und $a = \inf\{b^i: B_a^i \ni b^i \geq b^S \geq a \text{ für geeignetes } b^S \in A^S\}$;
- (s) zu jedem $a \in A^S$ existiert $B_a^S \subset A^S$ mit $|B_a^S| \leq \varphi$ und $a = \sup\{b^S: B_a^S \ni b^S \leq b^i \leq a \text{ für geeignetes } b^i \in A^i\}$.

Bemerkung:

Ein normales Paar (A^i, A^S) ist φ -regulär, falls zusätzlich $A^i \subset (A^S)_\varphi$ und $A^S \subset (A^i)^\varphi$ gilt.

Beispiel:

Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O}(X))$ ist genau dann regulär, wenn das Paar $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ τ -regulär ist.

Ein Kriterium für die Regularität und Separiertheit der Unterräume $\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S)$ gibt an

SATZ 24.

Für ein φ -reguläres Paar (A^i, A^S) gilt:

- 1. $(\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ ist regulär;
- 2. $(\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn $A^i \cup A^S$ $\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S)$ -trennend ist.

Beweis:

Zu 1.: Sei F eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S)$ $v_1 \in \mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S)$ mit $v_1 \notin F$. Es genügt zu zeigen, daß Punkte und abgeschlossene Mengen, deren Komplemente Elemente einer Subbasis sind, durch offene Mengen trennbar sind. Ohne Einschränkung sei daher

$\Gamma = \{v \in \mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S) : v(a) \geq t\}$ für ein $a \in A^i$ und $t \in \Gamma$.

Aus der φ -Regularität von (A^i, A^S) und der (A^i, A^S) - φ -Stetigkeit von v_1 folgt, daß zu $\varepsilon := \frac{t-v_1(a)}{2} > 0$ Elemente $b^S \in A^S$, $b^i \in A^i$ existieren mit

$$a \leq b^S \leq b^i \quad \text{und} \quad v_1(b^i) - v_1(a) < \varepsilon.$$

Für die in $(\mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ offenen Mengen

$$G_1 := \{v \in \mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S) : v(b^i) < t - \varepsilon\} \quad \text{und}$$

$$G_2 := \{v \in \mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S) : v(b^S) > t - \varepsilon\} \quad \text{gilt:}$$

$$v_1 \in G_1, \quad F \subset G_2 \quad \text{und} \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset.$$

Zu 2.: Ist $(\mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ ein Hausdorff-Raum, so ist $A^i \cup A^S$ notwendig $\mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S)$ -trennend. Sei also umgekehrt $A^i \cup A^S$ $\mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S)$ -trennend. Dann existiert zu verschiedenen Bewertungen $v_1, v_2 \in \mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S)$ ein $a \in A^i \cup A^S$ mit $v_1(a) \neq v_2(a)$. Ebenso wie im ersten Beweisteil (mit $\{v_2\}$ statt F) folgt, daß disjunkte offene Mengen $G_j \subset \mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S)$ existieren mit $v_j \in G_j$ ($j=1,2$).

Der vorhergehende Satz hat zur Konsequenz

SATZ 25.

Sei (A^i, A^S) - φ -regulär mit $V \subset \sigma(C^i \cup C^S)$ für

$$C^i := \{c \in (A^i)^\varphi : c \geq a \in V\} \quad \text{und} \quad C^S := \{c \in (A^S)^\varphi : c \leq a \in V\}.$$

Dann ist $(\mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ ein regulärer Hausdorff-Raum.

Beweis:

Gemäß dem vorhergehenden Satz ist nur zu zeigen, daß $A^i \cup A^S$ $\mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S)$ -trennend ist. Aus dem ersten Teil von Lemma 1.16 und der φ -Regularität von (A^i, A^S) folgt:

$$(1) \quad v|_{\sigma(A^i \cup A^S)} \text{ ist } (A^i, A^S)\text{-regulär für } v \in \mathcal{M}_\varphi^0(V; A^i, A^S).$$

a) Im Fall $\varphi = \sigma$ gilt $V \subset \sigma(A^i \cup A^S)$. Daher ergibt sich aus (1)

und Satz 2.19: $\mathcal{H}_O^O(V; A^i, A^S) = \mathcal{H}_O^O(V)$.

Gemäß Satz 17 ist $\rho(A^i \cup A^S)$ $\mathcal{H}_O^O(V)$ -trennend; wegen (1) ist also auch A^i $\mathcal{H}_O^O(V)$ -trennend.

b) Im Fall $\varphi = \tau$ kann ohne Einschränkung angenommen werden, daß $C^i \cup C^S \subset V$ gilt, denn für jede Bewertung $v \in \mathcal{H}_\tau^O(V; A^i, A^S)$ enthält der Definitionsbereich der Fortsetzung gemäß 2.14 die Menge $C^i \cup C^S$. Da C^i und C^S ρ -Systeme sind folgt aus (1) und dem ersten Teil von Lemma 1.16:

(2) $v|_{\rho(C^i \cup C^S)}$ ist (C^i, C^S) -regulär für $v \in \mathcal{H}_\tau^O(V; A^i, A^S)$.

Gemäß Satz 17 ist $\rho(C^i \cup C^S)$ $\mathcal{H}_O^O(V)$ -trennend; wegen (2) ist also C^i und damit A^i $\mathcal{H}_\tau^O(V; A^i, A^S)$ -trennend.

4.4. v-randlose Elemente

Da A^i bzw. A^S im allgemeinen nicht nach unten bzw. oben τ -geschlossen ist, kann der "Rand" eines Elementes aus V nicht wie in der Topologie definiert werden. Es ist jedoch möglich, die "Randlosigkeit" bzgl. einer Bewertung zu definieren.

DEFINITION 26.

Sei $v|_V$ eine ρ -Bewertung. Dann heißt ein Element $b \in V$ "v-randlos bzgl. (A^i, A^S) ", falls zu jedem $\epsilon > 0$ Elemente $a^i \in A^i$, $a^S \in A^S$ existieren mit $a^S \leq b \leq a^i$ und $v(a^i) - v(a^S) < \epsilon$.

Bezeichnung:

Falls keine Unklarheiten zu befürchten sind, wird statt "v-randlos bzgl. (A^i, A^S) " auch abkürzend "v-randlos" geschrieben.

Bemerkungen:

1. Sind A^i und A^S ρ -Systeme, so bilden auch die v-randlosen Elemente in V ein ρ -System.

2. Falls A^i nach unten und A^s nach oben σ -geschlossen ist, existieren zu einer p -Bewertung $v|V$ und einem v -randlosen Element $b \in V$ Elemente $a^i \in A^i$, $a^s \in A^s$ mit $a^s \leq b \leq a^i$ und $v(a^s) = v(a^i)$.

Beispiel:

Sei v ein τ -stetiges, lineares Funktional auf dem Vektorverband der beschränkten, $\mathcal{L}(X)$ -meßbaren Funktionen auf einem vollständig regulären Raum X . Für $A^i := \mathcal{C}(X) =: A^s$ ist dann ein Element $f \in V$ v -randlos bzgl. (A^i, A^s) , wenn gilt:

$$v(\chi_U) = 0 \quad \text{für} \quad U := \{x \in X : f \text{ unstetig in } x\},$$

$$\text{denn} \quad U = \{x \in X : \inf_{f \leq g \in \mathcal{C}(X)} g(x) > \sup_{f \leq h \in \mathcal{C}(X)} h(x)\}.$$

Die Existenz einer stetigen Ortsfunktion sichert die Existenz v -randloser Elemente.

LEMMA 27.

Für $h \in \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ und $y \in h \cap v[0,1]$ ist die Menge $\{t \in [0,1] : y(t) \text{ nicht } v\text{-randlos}\}$ für jedes $v \in \mathcal{W}_p^0(V)$ abzählbar.

Beweis:

Die Abbildung $t \mapsto v(y(t))$ von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$ ist antiton und besitzt daher nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Für eine Stetigkeitsstelle $t \in]0,1[$ ist also $y(t)$ wegen $h \in \mathcal{C}(A^i, A^s)$ v -randlos.

Mittels Lemma 27 ergibt sich

SATZ 28.

Im Fall eines normalen Paares (A^i, A^s) existiert zu $v \in \mathcal{W}_p^0(V)$ und $a \in A^i$, $b \in A^s$ mit $a \leq b$ ein v -randloses Element $c \in A^i$ (bzw. $c \in A^s$) mit $a \leq c \leq b$.

Beweis:

Gemäß Korollar 3.22 existiert eine Ortsfunktion $h \in \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ mit $a \leq h \leq b$. Für h gilt gemäß Lemma 3.14 a) und b):

$\underline{h}(t) \in V$ und $\overline{h}(t) \in V$ für $t \in [0,1]$.

Damit folgt die Behauptung aus Lemma 27.

Die Bedeutung der v -randlosen Elemente für die schwache Topologie ergibt sich aus den beiden folgenden Sätzen.

SATZ 29.

Es sei $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Netz in $\mathcal{W}_\rho(V)$, das bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ gegen $v \in \mathcal{W}_\rho(V)$ konvergiert. Für alle v -randlosen Elemente $b \in V$ konvergiert dann $(v_\alpha(b))_{\alpha \in I}$ gegen $v(b)$.

Beweis:

Für $A^s \ni a^s \leq b \leq a^i \in A^i$ gilt:

$$\liminf_{\alpha \in I} v_\alpha(b) \geq \liminf_{\alpha \in I} v_\alpha(a^s) \geq v(a^s),$$

$$\limsup_{\alpha \in I} v_\alpha(b) \leq \limsup_{\alpha \in I} v_\alpha(a^i) \leq v(a^i).$$

Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung:

Die Umkehrung der Aussage von Satz 25 ist falsch, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel:

Auf $X := \mathbb{N}$ existiert eine zusammenhängende Hausdorff-Topologie (siehe Bemerkung zu Satz 3.18). Ein finites Maß $\mu|_{\mathcal{P}(X)}$ mit $\mu(x) > 0$ für alle $x \in X$ besitzt also bzgl. $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ nur die μ -randlosen Elemente $\emptyset$ und X . Für eine bzgl. $\mathcal{T}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ konvergente Folge $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Maßen auf $\mathcal{P}(X)$ gilt aber insbesondere:

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(\{x\}) = \mu(\{x\}) \quad \text{für } x \in X.$$

Die Umkehrung von Satz 29 gilt jedoch, falls "genügend viele" v -randlose Elemente existieren. Das folgt aus

SATZ 30.

Sei $v|_V$ eine ρ -Bewertung und B eine Teilmenge von V mit

$$(i) \quad v(a) = \inf\{v(b) : B \ni b \geq a\} \quad \text{für } a \in A^i,$$

$$(s) \quad v(a) = \sup\{v(b) : B \ni b \leq a\} \quad \text{für } a \in A^s.$$

Dann konvergiert ein Netz $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $\mathcal{M}_p^0(V)$ bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ gegen v , falls $(v_\alpha(b))_{\alpha \in I}$ für alle $b \in B$ gegen $v(b)$ konvergiert.

Beweis:

Zu $a \in A^i$ und $\epsilon > 0$ existiert ein $b \in B$ mit $b \geq a$ und $v(b) - v(a) < \epsilon$. Folglich gilt:

$$\limsup_{\alpha \in I} v_\alpha(a) \leq \lim_{\alpha \in I} v_\alpha(b) = v(b) < v(a) + \epsilon,$$

$$\text{-d.h.} \quad \limsup_{\alpha \in I} v_\alpha(a) \leq v(a).$$

Für $a \in A^s$ ergibt sich analog: $\liminf_{\alpha \in I} v_\alpha(a) \geq v(a)$. ┐

Der vorhergehende Satz ist in den folgenden Fällen anwendbar.

KOROLLAR 31.

Sei $v|V$ eine p -Bewertung, für die eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (*) Es existieren p -Systeme B^i, B^s von v -randlosen Elementen mit $v \in \mathcal{M}_p^0(V; B^i, B^s)$ und $A^i \subset (B^i)_\varphi$, $A^s \subset (B^s)_\varphi$.
- (**) (A^i, A^s) ist normal und $v|V$ ist (A^i, A^s) -regulär.

Dann sind für ein Netz $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $\mathcal{M}_p^0(V)$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ konvergiert bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ gegen v ;
- (2) $(v_\alpha(b))_{\alpha \in I}$ konvergiert gegen $v(b)$ für alle v -randlosen Elemente $b \in V$.

§5. Metrisation

In diesem Paragraphen werden spezielle Unterräume von $(\mathcal{M}_p^0(V), \mathcal{T}(A^i, A^s))$ auf Metrisierbarkeit bzw. Pseudo-Metrisierbarkeit hin untersucht.

Zunächst wird gezeigt, daß auf $\mathcal{M}_p^0(V)$ für jede V -meßbare Ortsfunktion in natürlicher Weise Pseudo-Metriken erklärt sind.

DEFINITION 1.

Für $h \in \mathcal{L}(V)$ und $y \in h \cap V^{[0,1]}$ sei

$$\begin{aligned} \text{a) } d_h(v, w) &:= |I_v(h) - I_w(h)| \\ &= \left| \int_0^1 v(y(t)) - w(y(t)) dt \right| \quad \text{für } v, w \in \mathcal{W}_\rho^0(V); \\ \text{b) } d'_h(v, w) &:= \int_0^1 |v(y(t)) - w(y(t))| dt \quad \text{für } v, w \in \mathcal{W}_\rho^0(V). \end{aligned}$$

Im allgemeinen ist d_h bzw. d'_h keine Metrik auf $\mathcal{W}_\rho^0(V)$. Es gilt jedoch

SATZ 2.

Für $h \in \mathcal{L}(V)$ sind d_h und d'_h wohldefinierte Pseudo-Metriken auf $\mathcal{W}_\rho^0(V)$.

Beweis:

Die Abbildungen d_h und d'_h sind wohldefiniert, da für $v \in \mathcal{W}_\rho^0(V)$ und beliebigen $y_1, y_2 \in h \cap V^{[0,1]}$ gilt:

$v(y_1(t)) = v(y_2(t))$ bis auf abzählbar viele $t \in [0,1]$,
und ferner die Integranden beschränkt sind. Trivialerweise
besitzen d_h und d'_h die Eigenschaften einer Pseudo-Metrik. □

Im folgenden wird wesentlich verwendet, daß für eine Ortsfunktion $h \in \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ die Abbildung $v \mapsto I_v(h)$ von $\mathcal{W}_\rho^0(V)$ nach $\mathbb{R}$ stetig ist (siehe Satz 4.12). Die von der Pseudo-Metrik d_h auf $\mathcal{W}_\rho^0(V)$ erzeugte Topologie ist also für $h \in \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ gröber als $\mathcal{T}(A^i, A^s)$. Daß diese Aussage auch für d'_h gilt, zeigt

LEMMA 3.

Zu $h \in \mathcal{L}(V)$ bzw. $h \in \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ existieren Ortsfunktionen $h_n \in \mathcal{L}(V)$ bzw. $h_n \in \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ ($n \in \mathbb{N}$) derart, daß die Pseudo-Metrik d'_h und die Familie $\{d'_{h_n} : n \in \mathbb{N}\}$ äquivalent sind.

Beweis:

Sei $\{(p_n, q_n) : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\{(p, q) : p, q \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ mit } p < q\}$. Es wird gezeigt, daß die

Ortsfunktionen $h_n := h_{p_n, q_n}$ geeignet sind.

1. Die von d'_h auf $\mathcal{H}_p^0(V)$ erzeugte Topologie ist feiner als die von $\{d_{h_n} : n \in \mathbb{N}\}$ erzeugte, denn es gilt:

$$(q-p) \cdot |I_v(h_{p,q}) - I_w(h_{p,q})| \leq d'_h(v, w) \quad \text{für } v, w \in \mathcal{H}_p^0(V) \text{ und } p < q.$$

2. Sei nun $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{H}_p^0(V)$, die für alle $m \in \mathbb{N}$ bzgl. d_{h_m} gegen $v \in \mathcal{H}_p^0(V)$ konvergiert. Für ein beliebiges Element $y \in h \cap V^{[0,1]}$ bezeichnet f_n bzw. f die antitone Funktion $t \mapsto v_n(y(t))$ bzw. $t \mapsto v(y(t))$ auf $[0,1]$. Zunächst wird gezeigt:

(*) $f_n(t)$ konvergiert gegen $f(t)$ bis auf abzählbar viele $t \in [0,1]$.

Sei $t \in]0,1[$ eine Stetigkeitsstelle von f . Angenommen es existieren $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_{n_k}(t) > f(t) + \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da f in t von links stetig ist, existieren $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $0 < p < q < t$ und $f(p) - f(t) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Es folgt:

$$\frac{1}{q-p} \int_p^q (f_{n_k} - f) dt > \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

was im Widerspruch zu $\lim_{n \in \mathbb{N}} d_{h_{p,q}}(v_n, v) = 0$ steht.

Analog führt die Annahme " $f_{n_k}(t) < f(t) - \varepsilon$ " zum Widerspruch.

Wegen der Antitonie der Funktionen f_n , $n \in \mathbb{N}$, erhält man aus

(*) und dem Satz von Lebesgue die Beziehung

$$(\alpha) \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_r^s |f_n - f| dt = 0 \quad \text{für alle } r, s \in]0,1[.$$

Zu zeigen bleibt:

$$(\beta) \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_0^r |f_n - f| dt = 0 \quad \text{für } r \in]0,1[,$$

$$(\gamma) \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} \int_s^1 |f_n - f| dt = 0 \quad \text{für } s \in]0,1[.$$

Zu $\varepsilon > 0$ existieren $t_0 \in]0,1[$, $q_0 \in \mathbb{Q}$, $0 < q_0 \leq t_0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$a) \sup_{t \in]0,1[} f(t) - f(t_0) < \varepsilon,$$

$$b) f_n(t_0) - f(t_0) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

$$c) \left| \int_0^{q_0} (f_n(t) - f(t)) dt \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Aus a) und b) folgt:

$$f_n(t) + 2\varepsilon \geq f(t) \quad \text{für } t \in]0, t_0[\text{ und } n \geq n_0,$$

$$\text{also wegen c) und } |f_n(t) - f(t)| = (f_n(t) - f(t))^- + (f_n(t) - f(t))^+:$$

$$\int_0^{q_0} |f_n(t) - f(t)| dt < 5\varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Wegen (α) ist damit die Behauptung (β) gezeigt. Analog ergibt sich (γ). └

Aus dem vorhergehenden Lemma und Satz 4.12 folgt

SATZ 4.

Für $h \in \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ ist die von d_h' erzeugte Topologie auf $\mathcal{H}_p(V)$ gröber als $\mathcal{T}(A^i, A^s)$.

Eine hinreichende Bedingung für die Metrisierbarkeit eines Unterraumes von $\mathcal{H}_p(V)$ gibt

LEMMA 5.

Sei $\mathcal{M}$ ein Unterraum von $\mathcal{H}_p(V)$ und $\mathcal{H}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ mit

$$(i) \quad v(a) = \inf\{I_v(h) : \mathcal{H} \ni h \geq a\} \quad \text{für } a \in A^i \text{ und } v \in \mathcal{M};$$

$$(s) \quad v(a) = \sup\{I_v(h) : \mathcal{H} \ni h \leq a\} \quad \text{für } a \in A^s \text{ und } v \in \mathcal{M}.$$

Dann ist $(\mathcal{M}, \mathcal{T}(A^i, A^s))$ pseudo-metrisierbar und separabel.

Beweis:

1. Die von der abzählbaren Menge $\{d_h : h \in \mathcal{H}\}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ ist gemäß Satz 4.12 gröber als $\mathcal{T}(A^i, A^s)$.

Auf $\mathcal{M}$ ist $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}$ auch feiner:

Aus (i) und der Stetigkeit der Abbildung $v \mapsto I_v(h)$ für

$h \in \mathcal{H}$ bzgl. $\mathcal{H}$ folgt, daß $\hat{a}$ für $a \in A^i$ auf $\mathcal{M}$ bzgl. $\mathcal{H}$ nach oben halbstetig ist. Ebenso folgt aus (s), daß $\hat{a}$ für $a \in A^s$ auf $\mathcal{M}$ bzgl. $\mathcal{H}$ nach unten halbstetig ist.

2. Die von d_h , d.h. die von $v \mapsto I_v(h)$ erzeugte Topologie besitzt für jedes $h \in \mathcal{H}$ eine abzählbare Basis, also auch $\mathcal{H}$.

Bemerkung:

Im vorhergehenden Lemma ist $d_{\mathcal{H}} := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} (d_{h_n} \wedge 1)$ (oder auch $d'_{\mathcal{H}} := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} (d'_{h_n} \wedge 1)$) eine geeignete Pseudo-Metrik auf $\mathcal{M}$, wenn $\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathcal{H}$ ist.

Aus Lemma 5 folgt, daß $(\mathcal{H}_0(V; A^i, A^s), \mathcal{H}(A^i, A^s))$ pseudo-metrisierbar ist, wenn es eine abzählbare Teilfamilie $\mathcal{H}$ von $\mathcal{H}_0(A^i, A^s)$ gibt mit $A^i \subset \mathcal{H}_0$ und $A^s \subset \mathcal{H}^\sigma$ (vgl. Satz 3.17). Das wird ausgenutzt im Beweis zu

THEOREM 6.

$(\mathcal{H}_0(V; A^i, A^s), \mathcal{H}(A^i, A^s))$ ist pseudo-metrisierbar und separabel, wenn das Paar (A^i, A^s) den folgenden Bedingungen genügt:

- (1) (A^i, A^s) ist normal,
- (2) $A^i \subset (A^s)_\sigma$ und $A^s \subset (A^i)^\sigma$,
- (3) es existieren abzählbare Mengen $A^i_0 \subset A^i$, $A^s_0 \subset A^s$ mit $A^i \subset (A^i_0)_\sigma$ und $A^s \subset (A^s_0)^\sigma$.

Beweis:

Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß A^i_0 und A^s_0 ρ -Systeme sind. Nach Voraussetzung (2) existiert zu $a \in A^i_0$ eine abzählbare Menge $B^s_a \subset A^s$ mit $a = \inf B^s_a$.

Da (A^i, A^s) normal ist, kann B^s_a so gewählt werden, daß

- (a) $a = \inf \{a' : a \leq b \leq a' \in A^i \text{ für ein } b \in B^s_a\}$ für $a \in A^i_0$.

Analog folgt, daß es zu $b \in A^s_0$ eine abzählbare Menge $B^i_b \subset A^i$ gibt mit

(b) $b = \sup\{b' : b \geq a \geq b' \in A^S \text{ für } a \in B_b^i\} \quad \text{für } b \in A_0^S.$

Nach Voraussetzung (3) sind also

(c) $B^S := \bigcup_{a \in A_0^i} B_a^S \quad \text{und} \quad B^i := \bigcup_{b \in A_0^S} B_b^i$ abzählbar.

Zu jedem Paar $(a, b) \in A^i \times A^S$ mit $a \leq b$ existiert gemäß Korollar 3.22 ein Element $h^{ab} \in \mathcal{C}_0(A^i, A^S)$ mit $a \leq h^{ab} \leq b$.

Aus (c) folgt:

(d) $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} := \{h^{ab} : (a, b) \in (A_0^i \times B^S) \cup (B^i \times A_0^S) \text{ mit } a \leq b\} \\ \text{ist eine abzählbare Teilmenge von } \mathcal{C}_0(A^i, A^S). \end{array} \right.$

Ferner ergibt sich aus Voraussetzung (3) und (a), daß zu $\varepsilon > 0$, $v \in \mathcal{H}_0(V; A^i, A^S)$ und $c \in A^i$ Elemente $a \in A_0^i$ und $b \in B^S$ existieren mit $c \leq a \leq b$ und $v(b) < v(c) + \varepsilon$, d.h.

(e) $v(c) = \inf\{I_v(h) : \mathcal{H} \ni h \geq c\}$ für $c \in A^i$ und $v \in \mathcal{H}_0(V; A^i, A^S)$

Aus (3) und (b) ergibt sich die duale Aussage für $c \in A^S$.

Lemma 5 ist also auf $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H} := \mathcal{H}_0(V; A^i, A^S)$ anwendbar. □

Bemerkung:

Im vorhergehenden Theorem ist jede der Bedingungen (1) - (3) wesentlich.

(1) und (2) sind nicht hinreichend:

Sei X ein topologischer Raum mit einem nicht τ -stetigen Baire-Maß (Beispielsweise ist der Raum der Ordinalzahlen, die kleiner als die erste überabzählbare Ordinalzahl sind, mit der gewöhnlichen Topologie geeignet; vgl. [VN], Teil I, Remark 4 zu Th.28 und Th.24). Dann genügen $A^i := \mathcal{C}_0(X)$ und $A^S := \mathcal{O}_0(X)$ den Bedingungen (1) und (2), aber $(\mathcal{H}_0(V), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ mit $V := \sigma(\mathcal{C}_0(X) \cup \mathcal{O}_0(X))$ ist nicht metrisierbar, da es ein nicht τ -stetiges Baire-Maß gibt (siehe [VN], Teil II, Th.12).

(2) und (3) sind nicht hinreichend:

Auf $X := \mathbb{N}$ existiert eine nicht metrisierbare Hausdorff-

Topologie $\mathcal{O}(X)$, die eine abzählbare Basis besitzt (vgl. Bemerkung zu Satz 3.18). Da das Komplement einer einpunktigen Menge offen ist, gilt $\mathcal{F}(X) \subset (\mathcal{O}(X))_{\sigma}$, also auch $\mathcal{O}(X) \subset (\mathcal{F}(X))^{\sigma}$. Ein geeignetes Beispiel erhält man daher, wenn man A^i bzw. A^s als die Gesamtheit der abgeschlossenen bzw. offenen Mengen in $V := W := \mathcal{P}(X)$ wählt, denn die Dirac-Maße bilden einen zu X homöomorphen Unterraum von $(\mathcal{H}_0(V), \mathcal{J}(A^i, A^s))$.

(1) und (3) sind nicht hinreichend:

Sei $V = W = \tilde{\mathbb{R}}$, $A^i := \{a \in \mathbb{R} : |a| \geq 1\} \cup \{0\}$ und $A^s := \{a \in \mathbb{R} : |a| \geq 1\}$. Dann genügt (A^i, A^s) den Bedingungen (1) und (3), aber der topologische Raum $(\mathcal{H}_0(V), \mathcal{J}(A^i, A^s))$ ist nicht regulär, denn ist v_0 eine Bewertung in $\mathcal{H}_0(V)$ mit $v_0(0) < 0$ und $v_0(1) \geq 0$, so besitzt die abgeschlossene Menge $F := \{v \in \mathcal{H}_0(V) : v(0) \geq 0\}$ keine offene Umgebung, die v_0 nicht enthält, da zu v_0 ein $v^1 \in F$ existiert mit $v_0(x) = v^1(x)$ für alle $x \in A^i \cup A^s \setminus \{0\}$.

Bemerkung:

a) Unter den Bedingungen (1) und (2) von Theorem 6 gilt gemäß Satz 2.19:

$$\mathcal{H}_0(V; A^i, A^s) = \mathcal{H}_0(V) \quad \text{für } V \subset \sigma(A^i \cup A^s).$$

b) Unter der Bedingung (3) von Theorem 6 gilt gemäß Satz 2.2:

$$\mathcal{H}_0(V) = \mathcal{H}_T(V; A^i, A^s).$$

$(\mathcal{H}_0(V; A^i, A^s), \mathcal{J}(A^i, A^s))$ ist unter den Voraussetzungen von Theorem 6 nicht notwendig ein Hausdorff-Raum; jedoch gilt

SATZ 7

$(\mathcal{H}_0(V; A^i, A^s), \mathcal{J}(A^i, A^s))$ ist metrisierbar und separabel, wenn (A^i, A^s) den Bedingungen (1) - (3) von Theorem 6 genügt und zusätzlich $V \subset \sigma(A^i \cup A^s)$ gilt.

Beweis:

Gemäß Satz 2.19 gilt: $\mathcal{H}_G^0(V; A^i, A^S) = \mathcal{H}_G^0(V)$ (vgl. Teil a) der vorhergehenden Bemerkung). Wegen (2) gilt ferner:

$\sigma(A^i) = \sigma(A^S) = \sigma(A^i \cup A^S)$. Damit folgt aus Satz 4.22, a), daß $(\mathcal{H}_G^0(V; A^i, A^S), \mathcal{T}(A^i, A^S))$ ein T_1 -Raum ist. Mit Theorem 6 ergibt sich daraus die Behauptung.

Die Bedingungen (1) und (2) beinhalten im wesentlichen die Aussage, daß zu $a \in A^i$ und $b \in A^S$ mit $a \leq b$ eine "stetige Verbindung" existiert:

SATZ 8

A^i bzw. A^S sei ein nach unten bzw. oben bedingt σ -geschlossenes ρ -System derart, daß jedes Element in A^i bzw. A^S eine untere und obere Schranke in A^i bzw. A^S besitzt. Dann sind die Bedingungen (1) und (2) von Theorem 6 mit der folgenden Bedingung (*) äquivalent.

(*) Zu jedem Paar $(a, b) \in A^i \times A^S$ mit $a \leq b$ existiert eine "stetige Verbindung", d.h. es existiert $h \in \mathcal{C}(A^i, A^S)$ mit $a = \bar{h}(1) (= \inf_{t < 1} \bar{h}(t))$ und $b = \underline{h}(0) (= \sup_{t > 0} \underline{h}(t))$.

Beweis:

Unter der Voraussetzung des Satzes impliziert (*) trivialerweise die Aussagen (1) und (2).

Umgekehrt ergibt sich (*) folgendermaßen aus (1) und (2):

Zu $(a, b) \in A^i \times A^S$ mit $a < b$ existieren Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a \leq a_n \in A^i$ und $b = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$,
 $b \geq b_n \in A^S$ und $a = \inf_{n \in \mathbb{N}} b_n$.

Gemäß Korollar 3.22 existieren (A^i, A^S) -stetige Ortsfunktionen

h_n^a, h_n^b mit $a \leq h_n^a \leq b_n$ und $a_n \leq h_n^b \leq b$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es folgt, daß die Ortsfunktion h mit

$$\bar{h}(t) := \bar{h}_1^a(t) \vee \sup_{1 \leq j \leq n} \bar{h}_j^b(t) \quad \text{für } t \in]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[\quad \text{und}$$

$$\bar{h}(t) := \bar{h}_1^b(t) \wedge \inf_{1 \leq j \leq n} \bar{h}_j^a(t) \quad \text{für } t \in]1 - \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+2}[$$

eine stetige Verbindung von a und b ist.

Bemerkung

Für den Fall, daß $A^i \cup A^s$ ein kleinstes und größtes Element enthält, besitzt die Aussage von Theorem 6 eine Verallgemeinerung, in der die Voraussetzung abgeschwächt wird, daß A^i und A^s "abzählbar erzeugt" sind (vgl. Bedingung (3)). Es ist bekannt, daß ein regulärer T_1 -Raum genau dann metrisierbar ist, wenn er eine σ -diskrete Basis besitzt (siehe [KY], Theorem 4.18). Ersetzt man in Theorem 6 die Bedingung (3) durch eine schwächere Bedingung, die der Forderung einer σ -diskreten Basis entspricht, so kann gezeigt werden, daß $(\mathcal{H}_\tau(V; A^i, A^s), \tau(A^i, A^s))$ metrisierbar ist. Der Beweis wird jedoch nicht angegeben, da er in wesentlichen Teilen einem Beweis von Varadarajan für die klassische Aussage folgt, daß der Raum der τ -stetigen Borel-Maße über einem metrisierbaren Raum metrisierbar ist (siehe [VN], Teil II, Th.13).

§6. Kompaktheit

In diesem Paragraphen werden Kriterien für die relative Kompaktheit eines Unterraumes von $\mathcal{H}_\phi(V; A^i, A^s)$ angegeben. Dazu wird zunächst die Frage behandelt, unter welcher Bedingung sich die ϕ -Stetigkeit der Bewertungen eines konvergenten Netzes auf den Grenzwert überträgt.

6.1. Gleichgradige Stetigkeit

W bezeichne den Funktionenverband $\bar{\mathbb{R}}^X$ über einem topologischen Raum X und $V := A^i := A^s := \mathcal{C}(X)$ die stetigen, beschränkten

Funktionen in W . Ein klassisches Resultat von Alexandroff ([AF], p. 209) besagt, daß $\mathcal{W}_\phi^0(V)$ folgenabgeschlossen ist. Diese Aussage wird falsch, wenn man von der zugrundeliegenden topologischen Struktur abstrahiert. Beispielsweise ist $\mathcal{W}_\phi^0(V)$ für $V = W = [0,1]$ identisch mit dem Raum der stetigen, isotonen Funktionen auf $[0,1]$. Dieser ist aber bzgl. der punktweisen Konvergenz, also bzgl. $\mathcal{T}(V)$, nicht folgenabgeschlossen. Eine Folge stetiger, isotoner Funktionen auf $[0,1]$, die gegen eine unstetige Funktion konvergiert, ist nicht gleichgradig σ -stetig im Sinne von

DEFINITION 1.

1. Eine Teilmenge $\mathcal{W}$ von $\mathcal{W}_\phi^0(V)$ heißt "gleichgradig schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetig", falls sie den folgenden Bedingungen genügt:
 - (i) $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}_\phi^0(V; A^i, A^S)$;
 - (ii) für eine nicht-leere absteigend bzw. aufsteigend gerichtete Menge $A \subset A^i$ bzw. $B \subset A^S$ mit $|A|, |B| \leq \phi$ und $\inf A \leq \sup B$ gilt:

$$\inf_{a \in A, b \in B} \sup_{v \in \mathcal{W}} (v(a) - v(b)) \leq 0 .$$

2. Ein Netz $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $\mathcal{W}_\phi^0(V)$ heißt "gleichgradig schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetig", falls es den folgenden Bedingungen genügt:
 - (i) $v_\alpha \in \mathcal{W}_\phi^0(V; A^i, A^S)$ für alle $\alpha \in I$;
 - (ii) für Mengen A, B gemäß 1.(ii) gilt:

$$\inf_{a \in A, b \in B} \limsup_{\alpha \in I} (v_\alpha(a) - v_\alpha(b)) \leq 0 .$$

Bezeichnungen:

Entsprechend den früheren Abkürzungen wird

- a) im Fall $A^i = A = A^S$ "gleichgradig schwach A - ϕ -stetig" statt "gleichgradig schwach (A, A) - ϕ -stetig" und

- b) im Fall $A^i = V = A^S$ "gleichgradig schwach ϕ -stetig" statt "gleichgradig schwach V - ϕ -stetig" geschrieben.

Bemerkungen:

1. Sei $\mathcal{M}$ eine gleichgradig schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetige Teilmenge von $\mathcal{M}_\phi(V)$. Dann gilt nicht notwendig

$$\inf_{c \in C, d \in D} \sup_{v \in \mathcal{M}} (v(c) - v(d)) \leq 0$$
 für Paare $C, D \subset V$, die den Bedingungen (i) - (iii) der Definition 2.1 genügen.
2. Eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{M}_\phi(V)$ ist genau dann gleichgradig schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetig, wenn die Menge $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetig ist.
3. Sei $\mathcal{M}$ eine gleichgradig schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetige Teilmenge von $\mathcal{M}_\phi(V)$. Im allgemeinen ist dann $\{I_v|_{\mathcal{L}(V)} : v \in \mathcal{M}\}$ nicht gleichgradig schwach $\mathcal{L}_0(A^i, A^S)$ - ϕ -stetig (vgl. Satz 3.17), wie folgendes triviale Beispiel zeigt.

Beispiel:

Es bezeichne V das System der Borel-Mengen eines kompakten topologischen Raumes X und A^i bzw. A^S die Familie der abgeschlossenen bzw. offenen Mengen in $W := \mathcal{P}(X)$. Dann ist offenbar jede Teilmenge von $\mathcal{M}_\phi(V)$ gleichgradig schwach (A^i, A^S) - σ -stetig (vgl. (a) im ersten Beispiel zu Definition 2.1), also auch $\mathcal{M} := \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $v_n := n \cdot \delta_{x_0}$ für ein beliebiges $x_0 \in X$. Die zugehörigen Integrale I_{v_n} auf den $[0,1]$ -wertigen Funktionen über X sind jedoch nicht gleichgradig schwach σ -stetig, denn für die konstanten Funktionen

$$f_m = \frac{1}{m} \quad (m \in \mathbb{N}) \text{ gilt:}$$

$$\inf_{m \in \mathbb{N}} f_m = 0 \quad \text{und} \quad I_{v_n}(f_m) = \frac{n}{m} \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N}.$$

Für ein konvergentes Netz stellt die gleichgradige Stetigkeit

eine notwendige Bedingung für die Stetigkeit des Grenzwertes dar.

SATZ 2.

Ein Netz $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^s)$, das bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ gegen eine Bewertung $v \in \mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^s)$ konvergiert, ist gleichgradig schwach (A^i, A^s) - φ -stetig.

Beweis:

Sei $A \subset A^i$ bzw. $B \subset A^s$ eine nicht-leere absteigend bzw. aufsteigend gerichtete Menge mit $|A|, |B| \leq \varphi$ und $\inf A \leq \sup B$.

Zu $\epsilon > 0$ existieren dann $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ und $\alpha_0 \in I$ mit

$$(1) \quad v(a_0) < v(b_0) + \frac{\epsilon}{3} \quad (\text{wegen } v \in \mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^s)),$$

$$(2) \quad v_\alpha(a_0) < v(a_0) + \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für } \alpha \geq \alpha_0,$$

$$(3) \quad v_\alpha(b_0) > v(b_0) + \frac{\epsilon}{3} \quad \text{für } \alpha \geq \alpha_0.$$

Daraus folgt: $v_\alpha(a_0) - v_\alpha(b_0) < \epsilon$ für $\alpha \geq \alpha_0$.

Im Fall $A^i = A = A^s$ ist der Grenzwert eines konvergenten, gleichgradig schwach (A^i, A^s) - φ -stetigen Netzes offenbar schwach (A^i, A^s) - φ -stetig. Diese Aussage ist im allgemeinen Fall falsch.

Beispiel:

Sei X ein kompakter topologischer Raum mit einem nicht τ -stetigen Borel-Maß $\mu|_{\mathcal{L}(X)}$ (vgl. erstes Beispiel zu Definition 2.1). Zu μ existiert ein Netz $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ τ -stetiger Borel-Maße, das bzgl. $\mathcal{T}(f(X), g(X))$ gegen μ konvergiert, denn die endlichen Linearkombinationen von Dirac-Maßen bilden einen dichten Unterraum (siehe [TE2], Th. 11.1, (iii)). Wegen der Kompaktheit von X ist $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ gleichgradig schwach $(f(X), g(X))$ - τ -stetig (vgl. Beispiel zu Definition 1).

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die schwache (A^i, A^s) - φ -Stetigkeit des Grenzwertes eines konvergenten Netzes gibt der folgende Satz an.

SAZ 3.

Sei (A^i, A^S) φ -regulär und $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Netz in $\mathcal{H}_\varphi^0(V; A^i, A^S)$, das bzgl. $\mathcal{T}(A^i, A^S)$ gegen eine (A^i, A^S) -reguläre ρ -Bewertung $v|_V$ konvergiert. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ gleichmäßig schwach (A^i, A^S) - φ -stetig;
- (ii) $v|_V$ schwach (A^i, A^S) - φ -stetig.

Beweis:

Gemäß Satz 2 ist nur zu zeigen, daß (i) die Aussage (ii) impliziert.

1. Zu jeder Teilmenge A von A^i mit $|A| \leq \varphi$ existiert eine Teilmenge A' von A^i mit

$$(1) \quad |A'| \leq \varphi \quad \text{und} \quad \inf A' = \inf A;$$

$$(2) \quad \text{zu } a' \in A' \text{ existieren } b \in A^S, a \in A \text{ mit } a' \geq b \geq a.$$

Für eine Teilmenge B von A^S gilt die duale Aussage.

Aus der φ -Regularität von (A^i, A^S) (vgl. Definition 4.23)

folgt nämlich, daß zu jedem Element $a \in A^i$ eine Menge

$B_a^i \subset A^i$ existiert mit

$$(\alpha) \quad |B_a^i| \leq \varphi \quad \text{und} \quad a = \inf B_a^i;$$

$$(\beta) \quad \text{zu } b^i \in B_a^i \text{ existiert } b^S \in A^S \text{ mit } b^i \geq b^S \geq a.$$

$A' := \bigcup_{a \in A} B_a^i$ genügt also den Bedingungen (1) und (2).

2. Für $A \subset A^i$ und $B \subset A^S$ mit $|A|, |B| \leq \varphi$ und $\inf A \leq \sup B$ gilt $\inf_{a \in A} v(a) \leq \sup_{b \in B} v(b)$, denn:

Zu A bzw. B sei A' bzw. B' gemäß dem ersten Beweisteil gewählt. Aus Voraussetzung (i) folgt wegen (1), daß zu $\epsilon > 0$ Elemente $a' \in (A')_\rho$, $b' \in (B')^\rho$ und $\alpha_0 \in I$ existieren mit

$$(3) \quad v_{\alpha}(a') < v_{\alpha}(b') + \frac{1}{3}\epsilon \quad \text{für alle } \alpha \geq \alpha_0.$$

Wegen der ϕ -Regularität von (A^i, A^S) sind A^i und A^S ρ -Systeme. Zu a' existieren also wegen (2) Elemente $d \in A^S$, $a \in A_{\rho}$ mit

$$(4) \quad a' \geq d \geq a,$$

und entsprechend zu b' Elemente $e \in A^i$, $b \in B^{\rho}$ mit

$$(5) \quad b' \leq e \leq b.$$

Da $(v_{\alpha})_{\alpha \in I}$ gegen v konvergiert, existiert $\alpha_1 \in I$, $\alpha_1 \geq \alpha_0$, mit

$$(6) \quad v_{\alpha_1}(d) > v(d) - \frac{1}{3}\epsilon \quad \text{und}$$

$$(7) \quad v_{\alpha_1}(e) < v(e) + \frac{1}{3}\epsilon.$$

Es folgt:

$$(6) \quad v(d) < v_{\alpha_1}(d) + \frac{1}{3}\epsilon \leq v_{\alpha_1}(a') + \frac{1}{3}\epsilon$$

$$(3) \quad v_{\alpha_1}(b') + \frac{2}{3}\epsilon \leq v_{\alpha_1}(e) + \frac{2}{3}\epsilon < v(e) + \epsilon, \quad (5) \quad (7)$$

$$\text{also } v(a) - v(b) \leq v(d) - v(e) < \epsilon.$$

3. Wegen der (A^i, A^S) -Regularität von $v|V$ folgt die Behauptung aus dem zweiten Beweisteil und Satz 2.5. └

Für den Beweis von Satz 5 wird benötigt

LEMMA 4.

Sei (B^i, B^S) ein ϕ -reguläres Paar, $A := \rho(B^i \cup B^S)$ und $w|A$ eine ρ -Bewertung derart, daß für eine absteigend bzw. aufsteigend gerichtete Menge $C \subset B^i$ bzw. $D \subset B^S$ mit

$$|C|, |D| \leq \phi \quad \text{und} \quad \inf C \leq \sup D \quad \text{gilt:}$$

$$\inf_{c \in C} w(c) \leq \sup_{d \in D} w(d).$$

Dann existiert eine (B^i, B^S) -reguläre ρ -Bewertung $v|A$ mit

$$v(a) \geq w(a) \quad \text{für } a \in B^i \quad \text{und}$$

$$v(b) \leq w(b) \quad \text{für } b \in B^S.$$

Beweis:

Für $\underline{v}|B^i$ und $\bar{v}|B^S$ mit

$$\underline{v}(a) := \inf_{a \leq b \in B^S} w(b) \quad \text{für } a \in B^i \quad \text{und}$$

$$\overline{v}(b) := \sup_{b \geq a \in B^i} w(a) \quad \text{für } b \in B^S$$

wird gezeigt:

$$(a) \quad \underline{v}|B^i \quad \text{und} \quad \overline{v}|B^S \quad \text{sind } \rho\text{-Bewertungen;}$$

$$(b) \quad \underline{v}_*(c) = \overline{v}^*(c) \quad \text{für } c \in B^i \cup B^S.$$

Folglich ist $A' := \{c \in W : \underline{v}_*(c) = \overline{v}^*(c)\}$ ein ρ -System mit $A \subset A'$, d.h. durch

$$v(c) := \sup_{c \geq a \in B^i} \underline{v}(a) = \inf_{c \leq b \in B^S} \overline{v}(b) \quad \text{für } c \in A$$

wird eine (B^i, B^S) -reguläre ρ -Bewertung $v|A$ definiert mit

$$v(a) = \underline{v}(a) \geq w(a) \quad \text{für } a \in B^i \quad \text{und}$$

$$v(b) = \overline{v}(b) \leq w(b) \quad \text{für } b \in B^S.$$

Zu (a): Da $w|A$ eine ρ -Bewertung ist, folgt

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{v}|B^i \text{ ist reellwertig mit} \\ \underline{v}(a_1) + \underline{v}(a_2) \geq \underline{v}(a_1 \wedge a_2) + \underline{v}(a_1 \vee a_2) \end{array} \right. \quad \text{für } a_1, a_2 \in B^i.$$

Wegen der φ -Regularität von (B^i, B^S) existieren zu $a_1, a_2 \in B^i$ absteigend gerichtete Menge $C_k \subset B^i$ ($k=1,2$) mit

$$(2) \quad |C_k| \neq \emptyset \quad \text{und} \quad a = \inf C_k;$$

$$(3) \quad \text{zu } c_k \in C_k \text{ existiert } b \in B^S \text{ mit } c_k \geq b \geq a.$$

Das System $C := \{c_1 \wedge c_2 : c_1 \in C_1, c_2 \in C_2\} \subset B^i$ ist ebenfalls absteigend gerichtet und wegen (2) gilt:

$$|C| \neq \emptyset \quad \text{und} \quad a_1 \wedge a_2 = \inf C.$$

Daraus folgt nach Voraussetzung:

$$\inf_{c \in C} w(c) \leq w(b) \quad \text{für alle } b \in B^S \text{ mit } b \geq a_1 \wedge a_2.$$

Wegen (3) existieren also zu $\varepsilon > 0$ Elemente $b_k \in B^S$ ($k=1,2$)

mit $b_k \geq a_k$ und

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} w(b_1 \wedge b_2) < \underline{v}(a_1 \wedge a_2) + \frac{1}{2}\varepsilon, \\ w(b_1 \vee b_2) < \underline{v}(a_1 \vee a_2) + \frac{1}{2}\varepsilon. \end{array} \right.$$

Somit ergibt sich aus der Additivität von $w|A$ die Beziehung:

$$\begin{aligned} \underline{v}(a_1 \wedge a_2) + \underline{v}(a_1 \vee a_2) + \varepsilon &\stackrel{(4)}{\geq} w(b_1 \wedge b_2) + w(b_1 \vee b_2) \\ &= w(b_1) + w(b_2) \\ &\geq \underline{v}(a_1) + \underline{v}(a_2) . \end{aligned}$$

Wegen (1) ist $\underline{v}|B^i$ also eine ρ -Bewertung.

Analog folgt, daß $\overline{v}|B^s$ eine ρ -Bewertung ist.

Zu (b): Es gilt

$$(5) \quad \underline{v}(a) \leq \overline{v}(b) \quad \text{für } a \in B^i, b \in B^s \text{ mit } a \leq b ,$$

denn für eine absteigend bzw. aufsteigend gerichtete Menge

$C \subset B^i$ bzw. $D \subset B^s$ mit

$$(6) \quad |C|, |D| \neq \emptyset \quad \text{und} \quad a = \inf C, b = \sup D ,$$

$$(7) \quad \text{zu } c \in C \text{ existiert } b' \in B^s \text{ mit } c \geq b' \geq a ,$$

$$(8) \quad \text{zu } d \in D \text{ existiert } a' \in B^i \text{ mit } d \leq a' \leq b$$

gilt nach Voraussetzung:

$$\underline{v}(a) \leq \inf_{c \in C} v(c) \leq \sup_{d \in D} v(d) \leq \overline{v}(b) .$$

(7)
(6)
(8)

Zu $a \in B^i$ und $\varepsilon > 0$ existiert $b_\varepsilon \in B^s$ mit

$$a \leq b_\varepsilon \quad \text{und} \quad \underline{v}(a) + \varepsilon \geq w(b_\varepsilon) .$$

Wegen (5) und $\overline{v}(b_\varepsilon) \leq w(b_\varepsilon)$ folgt:

$$\underline{v}(a) \leq \overline{v}(b_\varepsilon) \leq w(b_\varepsilon) \leq \underline{v}(a) + \varepsilon ,$$

$$\text{d.h.} \quad \underline{v}(a) = \overline{v}^*(a) .$$

Analog erhält man: $\underline{v}_*(b) = \overline{v}(b)$ für $b \in B^s$. |

Bisher fehlt die Betrachtung von Netzen in $\mathcal{N}_\rho(V)$, von denen nicht bekannt ist, ob sie konvergieren. Im Fall " $A^i = V = A^s$ " konvergiert ein gleichgradig schwach φ -stetiges Netz $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ offenbar gegen eine schwach φ -stetige Bewertung, wenn der Grenzwert von $(v_\alpha(a))_{\alpha \in I}$ für alle $a \in V$ existiert. Eine weitergehende Aussage macht

SATZ 5.

Ein gleichgradig schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetiges Netz $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $\mathcal{W}_\rho^0(V)$ konvergiert bzgl. $\mathcal{J}(A^i, A^S)$ gegen eine schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetige ρ -Bewertung $v|V$, wenn Mengen $B^i \subset A^i$, $B^S \subset A^S$ existieren, die mit $A := \rho(B^i \cup B^S)$ den folgenden Bedingungen genügen:

- (i) $(v_\alpha(a))_{\alpha \in I}$ konvergiert in $\mathbb{R}$ für alle $a \in A$;
- (ii) (B^i, B^S) ist ϕ -regulär;
- (iii) $A^i \subset (B^i)_\phi$, $A^S \subset (B^S)^\phi$;
- (iv) $V \subset \{ \langle \underline{a}, b, \bar{a} \rangle : \underline{a}, \bar{a} \in A \text{ und } b \in \sigma((A^i)_\phi \cup (A^S)^\phi) \}$.

Beweis:

Aus der gleichgradigen schwachen (A^i, A^S) - ϕ -Stetigkeit und den Voraussetzungen (i) und (ii) folgt, daß das Paar (B^i, B^S) und die ρ -Bewertung $w|A$ mit

$$w(a) := \lim_{\alpha \in I} v_\alpha(a) \quad \text{für } a \in A$$

die Voraussetzungen von Lemma 4 erfüllen. Zu $w|A$ existiert also eine ρ -Bewertung $v|A$ mit

- (1) $v|A$ (B^i, B^S) -regulär;
- (2) $v(a) \geq w(a)$ für $a \in B^i$ und $v(b) \leq w(b)$ für $b \in B^S$.

Wegen (2) konvergiert das Netz $(v'_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit $v'_\alpha := v_\alpha|A$ bzgl. $\mathcal{J}(B^i, B^S)$ gegen $v|A$. Wegen (ii) ist daher Satz 3 anwendbar, d.h.

- (3) $v|A$ schwach (B^i, B^S) - ϕ -stetig.

Wegen (1) und (3) existiert gemäß Satz 2.18 zu $v|A$ eine (B^i, B^S) - ϕ -stetige σ -Bewertung $v|L$, die $v|A$ fortsetzt.

Aus den Voraussetzungen (iii) und (iv) folgt: $V \subset L$.

Daraus ergibt sich mit Satz 2.2:

- (4) $v|V$ ist schwach (A^i, A^S) - ϕ -stetig.

Das Netz $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ konvergiert wegen (2) bzgl. $\mathcal{J}(B^i, B^S)$ gegen

$v|V$. Daraus folgt mit (4), Voraussetzung (iii) und Satz 4.7, daß $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ auch bzgl. $\mathcal{K}(A^i, A^s)$ gegen $v|V$ konvergiert. □

Bemerkung:

Im Fall $\varphi = \sigma$ kann die Bedingung (iii) durch

$$(iii') \quad A^i \subset A_\sigma, \quad A^s \subset A^\sigma$$

abgeschwächt werden, denn $v|A$ ist schwach σ -stetig.

Das Beispiel zu Definition 1 zeigt, daß beim Übergang von $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ zu $(I_{v_\alpha})_{\alpha \in I}$ die gleichgradige schwache φ -Stetigkeit nicht erhalten bleibt. Es gilt jedoch der folgende Satz, in dem d_h' für $h \in \mathcal{L}(V)$ die Pseudo-Metrik gemäß Definition 5.1 bezeichnet.

SATZ 6.

Sei $\mathcal{H}$ ein ρ -System in $\mathcal{C}_0(A^i, A^s)$ und $(v_\alpha)_{\alpha \in J}$ ein gleichgradig schwach (A^i, A^s) - φ -stetiges Netz in $\mathcal{W}_\rho(V)$. Ist dann $(v_\alpha)_{\alpha \in J}$ für alle $h \in \mathcal{H}$ bzgl. d_h' ein Cauchy-Netz, so wird durch

$$I(h) := \lim_{\alpha \in J} I_{v_\alpha}(h) \quad \text{für } h \in \mathcal{H}$$

eine schwach φ -stetige ρ -Bewertung $I|\mathcal{H}$ definiert.

Beweis:

Es ist zu zeigen, daß $I|\mathcal{H}$ schwach φ -stetig ist. Seien also $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ ρ -Systeme in $\mathcal{H}$ mit $\inf \mathcal{F} \leq \sup \mathcal{G}$.

1. Ohne Einschränkung kann angenommen werden, daß Elemente

$h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ existieren mit

$$(1) \quad h_1 \leq h \leq h_2 \quad \text{für alle } h \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}.$$

Andernfalls geht man für beliebige Elemente $f_0 \in \mathcal{F}$, $g_0 \in \mathcal{G}$

über zu $\mathcal{F}' := \{ \langle f_0 \wedge g_0, f, f_0 \rangle : f \in \mathcal{F} \}$

und $\mathcal{G}' := \{ \langle g_0, g, g_0 \vee f_0 \rangle : g \in \mathcal{G} \}$. Dann gilt

$$a) \quad \inf \mathcal{F}' = \inf \mathcal{F} \vee (f_0 \wedge g_0) \leq \sup \mathcal{G}' \wedge (f_0 \vee g_0) = \sup \mathcal{G}';$$

b) zu $f' \in \mathcal{F}'$ existiert $f \in \mathcal{F}$ mit $f \leq f'$ und

zu $g' \in \mathcal{G}'$ existiert $g \in \mathcal{G}$ mit $g \geq g'$,

also $\inf_{f \in \mathcal{F}} I(f) \neq \inf_{f' \in \mathcal{F}'} I(f')$ und $\sup_{g \in \mathcal{G}} I(g) \geq \sup_{g' \in \mathcal{G}'} I(g')$.

2. Zu $\varepsilon > 0$ existiert gemäß Voraussetzung ein $\alpha_\varepsilon \in J$ mit

$$(2) \quad \int_0^1 |v_{\alpha_\varepsilon}(\bar{h}_k(t)) - v_\alpha(\bar{h}_k(t))| dt < \frac{1}{12} \varepsilon$$

für $\alpha_\varepsilon \neq \alpha \in J$ und $k \in \{1, 2\}$.

Ferner existiert ein $0 < \delta < 1$, so daß mit

$$D :=]0, \delta[\cup]1 - \delta, 1[\quad \text{gilt:}$$

$$\int_D |v_{\alpha_\varepsilon}(\bar{h}_k(t))| dt < \frac{1}{12} \varepsilon \quad \text{für } k \in \{1, 2\},$$

also wegen (2):

$$\int_D |v_\alpha(\bar{h}_k(t))| dt < \frac{1}{6} \varepsilon \quad \text{für } \alpha_\varepsilon \neq \alpha \in J \text{ und } k \in \{1, 2\}.$$

Daraus folgt:

$$(3) \quad \int_D |v_\alpha(\bar{h}(t))| dt < \frac{1}{3} \varepsilon \quad \text{für } \alpha_\varepsilon \neq \alpha \in J \text{ und } h \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G},$$

denn wegen (1) gilt für $h \in \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ stets

$$\int_D |v_\alpha(\bar{h}(t))| dt \leq \int_D (|v_\alpha(\bar{h}_1(t))| + |v_\alpha(\bar{h}_2(t))|) dt.$$

3. Sei $0 =: z_0 < z_1 < \dots < z_n := 1$ eine Zerlegung von

$[0, 1]$ mit $z_i - z_{i-1} < \frac{1}{2}\delta$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Da $(v_\alpha)_{\alpha \in J}$

gleichmäßig schwach φ -stetig ist, existieren zu

$i \in \{1, \dots, n-1\}$ Elemente $f_i \in \mathcal{F}$, $g_i \in \mathcal{G}$ und $\alpha_i \in J$ mit

$$(4) \quad v_\alpha(\bar{f}_i(z_{i+1})) \leq v_\alpha(\bar{g}_i(z_i)) + \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{für } \alpha_i \neq \alpha \in J.$$

Sei $f_\delta := \inf_{1 \leq i < n} f_i \in \mathcal{F}$, $g_\delta := \sup_{1 \leq i < n} g_i \in \mathcal{G}$ und $\alpha_\delta \in J$ mit

$\alpha_\delta \geq \alpha_i$ ($1 \leq i < n$). Für $t \in [z_i, z_{i+1}[$ mit $t > \delta$ und

$\alpha_\delta \neq \alpha \in J$ gilt wegen (4):

$$v_\alpha(\bar{f}_\delta(t)) \leq v_\alpha(\bar{f}_\delta(z_i)) \leq v_\alpha(\bar{g}_\delta(z_{i-1})) + \frac{1}{3}\varepsilon$$

$$\stackrel{(4)}{\leq} v_\alpha(\bar{g}_\delta(t-\delta)) + \frac{1}{3}\varepsilon, \text{ also}$$

$$(5) \quad v_\alpha(\bar{f}_\delta(t)) \leq v_\alpha(\bar{g}_\delta(t-\delta)) + \frac{1}{3}\varepsilon$$

für $t \in]\delta, 1[$ und $\alpha_\delta \neq \alpha \in J$.

.. Aus den Aussagen (3) und (5) erhält man:

$$(6) \quad I(\bar{f}_\delta) \leq I(\bar{g}_\delta) + \varepsilon,$$

denn für $\alpha \in J$ mit $\alpha \geq \alpha_\varepsilon$ und $\alpha \geq \alpha_\delta$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_\alpha(\bar{f}_\delta(t)) dt &\stackrel{(3)}{\leq} \int_\delta^{1-\delta} v_\alpha(\bar{f}_\delta(t)) dt + \frac{1}{3}\varepsilon \\ &\stackrel{(5)}{\leq} \int_0^{1-\delta} v_\alpha(\underline{g}_\delta(t)) dt + \frac{2}{3}\varepsilon \\ &\stackrel{(3)}{\leq} \int_0^1 v_\alpha(\underline{g}_\delta(t)) dt + \varepsilon. \end{aligned}$$

Aus (6) folgt: $\inf_{f \in \mathcal{F}} I(f) \leq \sup_{g \in \mathcal{G}} I(g)$.

6.2. Relativ kompakte Unterräume

Unter Ausnutzung der Ergebnisse von Abschnitt 6.1 wird nun ein Kriterium für die relative Kompaktheit einer Teilmenge von

$\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^s)$ angegeben.

Eine hinreichende Bedingung für die Kompaktheit eines abgeschlossenen Unterraumes von $\mathcal{W}_\varphi(V)$ gibt an

SATZ 7.

Sei $\mathcal{W}_\varphi$ ein abgeschlossener, Hausdorffscher Unterraum von $(\mathcal{W}_\varphi(V), \mathcal{T}(A^i, A^s))$. Dann ist eine Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathcal{W}_\varphi$ relativ kompakt, falls gilt:

$$(*) \quad \gamma_a := \sup_{v \in \mathcal{M}} v(a) < \infty \quad \text{für alle } a \in V.$$

Beweis:

Für $a \in V$ sei $X_a := [-\gamma_a, \gamma_a]$ mit der gewöhnlichen Topologie.

Dann ist $X := \prod_{a \in V} X_a$ bzgl. der Produkttopologie $\mathcal{T}$ kompakt

(Satz von Tychonov) mit $\mathcal{M} \subset X$. Für die abgeschlossene Hülle $\mathcal{M}^a$ von $\mathcal{M}$ bzgl. $\mathcal{T}$ gilt: $\mathcal{M}^a \subset \mathcal{W}_\varphi(V)$. Da die Topologie $\mathcal{T}$ auf $\mathcal{W}_\varphi(V) \cap X$ feiner als $\mathcal{T}(A^i, A^s)$ ist, gilt ferner:

$$(1) \quad \mathcal{M}^a \subset \mathcal{W}_\varphi,$$

(2) die Injektion von dem kompakten Raum $(\mathcal{M}^a, \mathcal{T})$ in den Hausdorff-Raum $(\mathcal{W}_\varphi, \mathcal{T}(A^i, A^s))$ ist stetig.

Wegen (2) ist $\mathcal{W}^a$ auch die abgeschlossene Hülle von $\mathcal{W}$ in $(\mathcal{W}_0, \mathcal{F}(A^i, A^s))$, und es gilt $(\mathcal{W}^a, \mathcal{F}(A^i, A^s)) = (\mathcal{W}^a, \mathcal{F})$. □

Bemerkungen:

1. Die hinreichende Bedingung (*) ist auch notwendig, falls zu $a \in V$ Elemente $\underline{a} \in A^s$, $\bar{a} \in A^i$ existieren mit $\underline{a} \leq a \leq \bar{a}$, denn die Abbildung $v \mapsto v(\underline{a})$ bzw. $v \mapsto v(\bar{a})$ ist nach unten bzw. oben halbstetig, also auf kompakten Mengen nach unten bzw. oben beschränkt.
2. Ein abgeschlossener Unterraum $\mathcal{W}$ von $(\mathcal{W}_0(V), \mathcal{F}(A^i, A^s))$ mit Eigenschaft (*) ist kompakt, da jedes Netz bzgl. $\mathcal{F}(V)$, also auch bzgl. $\mathcal{F}(A^i, A^s)$, einen Häufungspunkt besitzt.
3. Im Fall eines streng normalen Paares (A^i, A^s) mit $V = \rho(A^i \cup A^s)$ bilden die (A^i, A^s) -regulären Bewertungen auf V einen vollständig regulären Hausdorff-Raum $\mathcal{W}_0$, denn $\mathcal{W}_0$ ist gemäß Satz 4.15 homöomorph zu dem Raum $(\mathcal{F}(\mathcal{C}_0), \mathcal{F}(\mathcal{C}_0))$ der affinen Bewertungen auf $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_0(A^i, A^s)$. $\mathcal{W}_0$ ist aber in $(\mathcal{W}_0(V), \mathcal{F}(A^i, A^s))$ nicht notwendig abgeschlossen, wie in der ersten Bemerkung zu Satz 4.19 gezeigt wurde. Trotzdem ist der vorhergehende Satz anwendbar, denn $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0)$ ist bzgl. $\mathcal{F}(\mathcal{C}_0)$ im Raum aller Bewertungen auf $\mathcal{C}_0$ abgeschlossen.

Die gleichgradige φ -Stetigkeit einer punktweise beschränkten Teilmenge $\mathcal{W}$ von $\mathcal{W}_0(V)$ ist die wesentliche Bedingung für die relative Kompaktheit von $\mathcal{W}$ in $(\mathcal{W}_0(V; A^i, A^s), \mathcal{F}(A^i, A^s))$.

THEOREM 8.

Unter den Voraussetzungen

(1) (A^i, A^s) φ -regulär,

(2) $\forall C \in \{ \langle \underline{a}, c, \bar{a} \rangle : \underline{a}, \bar{a} \in \rho(A^i \cup A^s) \text{ und } c \in \sigma((A^i)_\varphi \cup (A^s)^\varphi) \}$

gilt:

a) Für ein Netz $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S)$ mit

$$(*) \quad \limsup_{\alpha \in I} |v_\alpha(a)| < \infty \quad \text{für alle } a \in V$$

sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $(\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S), \tau(A^i, A^S))$ kompakt¹⁾;

(ii) $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ gleichgradig schwach (A^i, A^S) - φ -stetig.

b) Für eine Teilmenge $\mathcal{W}$ von $\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S)$ mit

$$(*)' \quad \sup_{a \in \mathcal{W}} |v(a)| < \infty \quad \text{für alle } a \in V,$$

sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i)' $\mathcal{W}$ in $(\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S), \tau(A^i, A^S))$ relativ kompakt;

(ii)' $\mathcal{W}$ gleichgradig schwach (A^i, A^S) - φ -stetig.

Beweis:

(i) $\rightarrow$ (ii): Angenommen, es existiert eine nicht-leere absteigend bzw. aufsteigend gerichtete Menge $A \subset A^i$ bzw. $B \subset A^S$ mit $|A|, |B| \leq \varphi$ und $\inf A \leq \sup B$ derart, daß

$$\inf_{a \in A, b \in B} \limsup_{\alpha \in I} (v_\alpha(a) - v_\alpha(b)) > 0.$$

Dann existiert wegen (i) ein in $\mathcal{W}_\varphi(V; A^i, A^S)$ konvergentes Teilnetz $(v'_\beta)_{\beta \in I'}$ von $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ mit

$$\inf_{a \in A, b \in B} \limsup_{\beta \in I'} (v'_\beta(a) - v'_\beta(b)) > 0.$$

Das steht aber im Widerspruch zu Satz 6.2.

(ii) $\rightarrow$ (i): Für $a \in V$ sei $\delta_a \in \mathbb{R}$ mit $\delta_a > \limsup_{\alpha \in I} v_\alpha(a)$.

Da der Produktraum $\prod_{a \in V} [-\delta_a, \delta_a]$ kompakt ist (Satz von

Tychonov), existiert zu einem Teilnetz $(v'_\beta)_{\beta \in I'}$ ein Teil-

netz $(v''_\gamma)_{\gamma \in I''}$ von $(v'_\beta)_{\beta \in I'}$ derart, daß $(\langle -\delta_a, v''_\gamma(a), \delta_a \rangle)_{\gamma \in I''}$,

also $(v''_\gamma(a))_{\gamma \in I''}$, für alle $a \in V$ konvergiert. Wegen (1), (2)

¹⁾ Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ in einem topologischen Raum X heißt "kompakt", wenn zu jedem Teilnetz $(x'_\beta)_{\beta \in I'}$ von $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ ein Teilnetz von $(x'_\beta)_{\beta \in I'}$ existiert, das konvergiert.

und (ii) folgt aus Satz 5 mit $B^i = A^i$ und $B^S = A^S$, daß
 $(v''_{\gamma})_{\gamma \in I''}$ bzgl. $\gamma(A^i, A^S)$ gegen eine Bewertung $v \in \mathcal{W}_\phi(V; A^i, A^S)$
 konvergiert.

(i)' $\rightarrow$ (ii)': Sei $\emptyset \neq A \subset A^i$ bzw. $\emptyset \neq B \subset A^S$ absteigend bzw.
 aufsteigend gerichtet mit $|A|, |B| \leq \phi$ und $\inf A \leq \sup B$.

Für $\epsilon > 0$ und $a \in A$, $b \in B$ ist

$$\begin{aligned} U_{a,b}^\epsilon &:= \{v \in \mathcal{W}_\phi(V) : v(a) < v(b) + \epsilon\} \\ &= \bigcup_{\gamma \in \mathbb{R}} \{v \in \mathcal{W}_\phi(V) : v(a) < \gamma, v(b) > \gamma - \epsilon\} \end{aligned}$$

eine offene Teilmenge von $\mathcal{W}_\phi(V)$. Das System

$\{U_{a,b}^\epsilon : a \in A, b \in B\}$ ist also eine offene Überdeckung von
 $\mathcal{W}_\phi(V; A^i, A^S)$. Da A nach unten und B nach oben gerichtet ist,
 ergibt sich aus (i), daß Elemente $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ existieren
 mit $v(a_0) < v(b_0) + \epsilon$ für alle $v \in \mathcal{W}_\phi$.

(ii)' $\rightarrow$ (i)': Wegen (1) sind A^i und A^S ϕ -Systeme, und zu
 $a \in A^i$ (bzw. $b \in A^S$) existiert $b \in A^S$ (bzw. $a \in A^i$) mit $a \leq b$.
 Wegen (2) gilt also: $\forall c \in ((A^i)_\phi \cup (A^S)_\phi : A^i) \exists a \leq c \leq b \in A^S$.
 Damit folgt aus Satz 4.25, daß $(\mathcal{W}_\phi(V; A^i, A^S), \gamma(A^i, A^S))$ ein
 regulärer Hausdorff-Raum ist. Es genügt also zu zeigen, daß
 jedes Netz in $\mathcal{W}_\phi$ ein in $\mathcal{W}_\phi(V; A^i, A^S)$ konvergentes Teilnetz
 besitzt. Die Behauptung ergibt sich daher aus Teil a) des
 Theorems. └

Bemerkungen:

1. Die Voraussetzungen (1) und (2) werden für die Implikation
 "(i) $\rightarrow$ (ii)" bzw. "(i)' $\rightarrow$ (ii)'" nicht gebraucht.
2. Gemäß Satz 2.19 folgt aus den Voraussetzungen (1) und (2):

$$\mathcal{W}_\phi(V; A^i, A^S) = \mathcal{W}_\phi(V).$$

6.3. Beispiele

Für $A^i = A = A^s$ mit $V \subset \{ \langle \underline{a}, b, \bar{a} \rangle : \underline{a}, \bar{a} \in A \text{ und } b \in \sigma(A) \}$ sind die Voraussetzungen von Theorem 6.8 erfüllt. In diesem Fall ist jedoch die Aussage von Theorem 6.8 wesentlich einfacher zu beweisen, da der Grenzwert bzgl. $\mathcal{T}(A)$ eines gleichgradig schwach A - φ -stetigen Netzes auf A schwach A - φ -stetig ist, und daher Theorem 2.14 direkt zur Anwendung kommt. Dennoch werden auch für diesen Fall Beispiele angegeben (siehe Beispiele A und B).

Beispiel A

Punktweise Konvergenz von isotonen Funktionen auf $\mathbb{R}$.

Sei $W = \widetilde{\mathbb{R}}$ mit der gewöhnlichen Ordnung und $V, A \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ mit $A \subset V$. Dann ist $\mathcal{W}_\rho^0(V)$ identisch mit dem Raum der isotonen Funktionen auf V . Gemäß Satz 4.18 ist $(\mathcal{W}_\rho^0(V), \mathcal{T}(A))$ vollständig regulär und genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn $A = V$ gilt. $\mathcal{W}_\sigma^0(V; A)$ ist gemäß den Sätzen 4.17 und 4.18, Teil 2, genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn A in V dicht liegt. Für eine dichte Teilmenge A von V ist $\mathcal{W}_\sigma^0(V; A) = \mathcal{W}_\sigma^0(V)$ (Satz 2.6). Gilt zusätzlich $A_\sigma \cap A^\sigma = A$, so ist $\mathcal{W}_\sigma^0(V)$ identisch mit dem Raum der stetigen, isotonen Funktionen auf V . Aus Theorem 6.8 erhält man das einfache Ergebnis:

SATZ

Sei V eine Teilmenge von $\widetilde{\mathbb{R}}$ und A eine dichte Teilmenge von V mit $A_\sigma \cap A^\sigma = A$ und $\inf V \in A$ bzw. $\sup V \in A$, falls $\inf V \in V$ bzw. $\sup V \in V$. Dann ist eine Menge H von stetigen, isotonen Funktionen auf V bzgl. der Topologie der punktweisen Konvergenz auf A relativ kompakt im Raum der stetigen Funktionen auf V , wenn gilt:

- (a) $\sup_{h \in H} |h(x)| < \infty$ für alle $x \in V$;

- (b) zu $x \in A$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgehung U von x mit
- $$\sup_{h \in H} |h(y) - h(x)| < \varepsilon \quad \text{für } y \in U$$
- (d.h. H ist auf A gleichgradig stetig).

Bemerkung:

Eine bzgl. der punktweisen Konvergenz auf A im Raum der stetigen, isotonen Funktionen auf V konvergente Folge ist nicht notwendig auf V punktweise konvergent. Denn $V = [0,1] \cup \{2\}$ und $A = [0,1[\cup \{2\}$ erfüllen die Voraussetzungen des Satzes, und die Folge $h_n: x \mapsto x^n \wedge 1$ konvergiert bzgl. $\mathcal{T}(A)$ gegen $x_{\{2\}}$, jedoch nicht bzgl. $\mathcal{T}(V)$.

Beispiel B

Punktweise Konvergenz bzgl. $\mathcal{K}(X)$ (Vage Topologie).

SATZ

Sei X ein lokal-kompakter Raum und L der Vektorverband der reellwertigen, $\mathcal{L}(X)$ -meßbaren Funktionen auf X mit

- (1) zu $f \in L$ existieren $\underline{f}, \bar{f} \in \mathcal{K}(X)$ mit $\underline{f} \leq f \leq \bar{f}$.

Bezeichnet $\mathcal{M}_\tau(L)$ den Raum der schwach $\mathcal{K}(X)$ - τ -stetigen, nicht-negativen, linearen Funktionale auf L , so ist $\mathcal{M}_\tau(L)$ bzgl. der Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{K}(X))$ der punktweisen Konvergenz auf $\mathcal{K}(X)$ ein vollständig regulärer Hausdorff-Raum, und eine Teilmenge $\mathcal{M}_0$ von $\mathcal{M}_\tau(L)$ ist genau dann relativ-kompakt, wenn gilt:

- (2)
$$\sup_{f \in \mathcal{M}_0} |I(h)| < \infty \quad \text{für alle } h \in L.$$

Beweis:

- Gemäß den Sätzen 4.18 und 4.25 ist $\mathcal{H}_\tau(L; \mathcal{K}(X))$ und damit $\mathcal{M}_\tau(L)$ ein vollständig regulärer Hausdorff-Raum.
- Die Restriktion einer Bewertung $v \in \mathcal{H}_\tau(L; \mathcal{K}(X))$ auf $\{ \langle \underline{f}, f, \bar{f} \rangle : f \in L \}$ ist für jedes Paar $\underline{f}, \bar{f} \in \mathcal{K}(X)$ eine σ -Bewertung. Aus Korollar 1.17 und der τ -Stetigkeit von v

folgt daher, daß $v|_L$ (A^i, A^S) -regulär ist für
 $A^i := \mathcal{C}^i(X) \cap L$ und $A^S := \mathcal{C}^S(X) \cap L$. Daraus ergibt sich
wiederum mittels der τ -Stetigkeit von v , daß $v|_L$ genau
dann linear ist, wenn $v|_{\mathcal{K}(X)}$ linear ist. Damit ist ge-
zeigt, daß $\mathcal{M}_\tau(L)$ bzgl. $\mathcal{F}(\mathcal{K}(X))$ ein abgeschlossener
Unterraum von $\mathcal{H}_\tau(L; \mathcal{K}(X))$ ist.

3. Für eine Teilmenge $\mathcal{M}_0$ von $\mathcal{M}_\tau(L)$ ist (2) offenbar eine
notwendige Bedingung für die relative Kompaktheit von $\mathcal{M}_0$.
Genügt $\mathcal{M}_0$ der Bedingung (2), so folgt aus der Linearität
der Bewertungen in $\mathcal{M}_0$ und dem Satz von Dini (vgl. [KY],
p.239), daß $\mathcal{M}_0$ gleichgradig schwach $\mathcal{K}(X)$ - τ -stetig ist
(siehe Beispiel B in Teil I). Somit ergibt sich aus Theo-
rem 6.8 und dem zweiten Beweisteil, daß $\mathcal{M}_0$ in $\mathcal{M}_\tau(L)$
relativ kompakt ist.

Ein Kriterium für die schwache $\mathcal{K}(X)$ - τ -Stetigkeit gibt folgender
Zusatz an.

Zusatz:

Ein nicht-negatives, lineares Funktional I auf L ist genau
dann schwach $\mathcal{K}(X)$ - τ -stetig, wenn für jedes absteigend ge-
richtete System $\mathcal{F} \subset \mathcal{K}(X)$ mit $\inf \mathcal{F} \geq 0$ gilt:

$$(*) \quad I(\inf \mathcal{F}) = \inf_{f \in \mathcal{F}} I(f) .$$

Ist nämlich J die τ -stetige Fortsetzung von $I|_{\mathcal{K}(X)}$ gemäß

Beispiel B in Teil I, so stimmen J und I wegen $(*)$ auf

$A^i = \mathcal{C}^i(X) \cap L$ und $A^S = \mathcal{C}^S(X) \cap L$ und damit auch auf L überein,
denn $J|_L$ ist (A^i, A^S) -regulär (vgl. den zweiten Teil im vorher-
gehenden Beweis).

Beispiel C

Schwache Topologie auf dem Raum der Borel-Maße.

Sei X ein topologischer Raum und $M(X, \sigma)$ bzw. $M(X, \tau)$ die Gesamtheit der Borel-Maße bzw. der τ -stetigen (d.h. der $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ - τ -stetigen) Borel-Maße auf X . Der folgende Satz macht Aussagen über die Struktur der schwachen Topologie $\mathcal{T}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ auf $M(X, \sigma)$ bzw. $M(X, \tau)$.

SATZ

1. $\mathcal{T}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ ist die grösste Topologie derart, daß die Abbildung $\mu \mapsto \int_X f d\mu$ für jede nach oben bzw. unten halbstetige, beschränkte Funktion f auf X nach oben bzw. unten halbstetig ist.
2. Für einen vollständig regulären bzw. metrisierbaren Raum X ist $\mathcal{T}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ auf $M(X, \tau)$ bzw. $M(X, \sigma)$ die grösste Topologie derart, daß die Abbildung $\mu \mapsto \int_X f d\mu$ für jede stetige, beschränkte Funktion f auf X stetig ist.
3. $(M(X, \tau), \mathcal{T}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)))$ ist genau dann ein regulärer bzw. vollständig regulärer Hausdorff-Raum, wenn X ein regulärer bzw. vollständig regulärer Hausdorff-Raum ist.
4. a) $(M(X, \sigma), \mathcal{T}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)))$ besitzt genau dann eine abzählbare Basis, wenn X eine abzählbare Basis besitzt.
 b) $(M(X, \sigma), \mathcal{T}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)))$ ist ein vollständig regulärer Hausdorff-Raum, falls X metrisierbar ist.
 c) $(M(X, \sigma), \mathcal{T}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X)))$ ist genau dann metrisierbar und separabel, wenn X metrisierbar und separabel ist.

Beweis:

Zu 1. und 2.: Da den $[0, 1]$ -wertigen halbstetigen bzw. stetigen Funktionen auf X die halbstetigen bzw. stetigen Ortsfunktionen

entsprechen (vgl. Abschnitt 3.5), folgt die erste bzw. zweite Behauptung aus Satz 4.10 bzw. 4.14,b).

Zu 3.: Für einen Hausdorff-Raum ist die Abbildung $x \rightarrow \delta_x$ eine topologische Einbettung von X in $(M(X, \tau), \mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$. Daher ergibt sich die dritte Behauptung mit $\varphi = \tau$ aus den Sätzen 4.25 und 4.19,b).

Zu 4.: Behauptung a) folgt aus Satz 4.8, und Behauptung b) mit $\varphi = \sigma$ aus den Sätzen 4.25 und 4.19,b) (vgl. den vorhergehenden Beweisteil). Da für einen metrisierbaren Raum das Paar $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ normal ist (vgl. Teil a) im Beispiel zu Definition 20), ergibt sich Behauptung c) aus Theorem 5.6. □

Bemerkung:

$(M(X, \sigma), \mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ ist nicht notwendig vollständig regulär, wenn X vollständig regulär ist. Es gibt sogar einen kompakten Raum, der verschiedene Borel-Maße μ_1, μ_2 zuläßt mit
(*) $\mu_1(F) \leq \mu_2(F)$ für $F \in \mathcal{F}(X)$ und $\mu_1(G) \geq \mu_2(G)$ für $G \in \mathcal{G}(X)$,
denn ist μ_1 ein nicht τ -stetiges Borel-Maß auf X (vgl. erstes Beispiel zu Definition 2.1) und ist μ_2 die τ -stetige Fortsetzung von $\mu_1|_{\mathcal{L}_0(X)}$ (vgl. Beispiel $\tilde{C}$ in Abschnitt 2.4), so gilt (*) für μ_1 und μ_2 . Aus (*) folgt aber, daß
 $(M(X, \sigma), \mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ weder ein Hausdorff-Raum noch regulär ist (vgl. Teil β) in der ersten Bemerkung zu Satz 4.19).

Theorem 6.8 liefert folgendes Ergebnis, das von Topsøe bewiesen wurde (siehe [TE1], Th.6 bzw. [TE2], Th.9.2).

SATZ

Sei X ein regulärer topologischer Raum.

a) Ein Netz $(\mu_\alpha)_{\alpha \in I}$ in $M(X, \tau)$ mit $\limsup_{\alpha \in I} \mu_\alpha(X) < \infty$ ist

genau dann kompakt in $(M(X, \tau), \mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$, wenn gilt:

$$(*) \quad \inf_{F \in \mathcal{O}} \limsup_{\alpha \in I} \mu_{\alpha}(F) = 0$$

für $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}(X)$ absteigend gerichtet mit $\bigcap \mathcal{O} = \emptyset$.

b) Eine Teilmenge M von $M(X, \tau)$ mit $\sup_{\mu \in M} \mu(X) < \infty$ ist genau

dann relativ kompakt, wenn gilt:

$$(**) \quad \inf_{F \in \mathcal{O}} \sup_{\mu \in M} \mu(F) = 0$$

für $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}(X)$ absteigend gerichtet mit $\bigcap \mathcal{O} = \emptyset$.

Beweis:

Das Paar $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ ist τ -regulär (vgl. Beispiel zu Definition 4.23) und die Bedingung $(*)$ bzw. $(**)$ ist äquivalent mit der gleichgradigen $(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$ - τ -Stetigkeit von $(\mu_{\alpha})_{\alpha \in I}$ bzw. M (vgl. (a) im ersten Beispiel zu Definition 2.1). Folglich ergibt sich die Behauptung aus Theorem 6.8.

Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann heißt eine Teilmenge M von $M(X, \sigma)$ "gleichgradig straff", wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge K gibt mit $\sup_{\mu \in M} \mu(K) < \varepsilon$. Eine gleichgradig straffe Teilmenge genügt der Bedingung $(**)$.

KOROLLAR

Sei X ein regulärer Hausdorff-Raum. Dann ist jede gleichgradig straffe Teilmenge M von $M(X, \tau)$ mit $\sup_{\mu \in M} \mu(X) < \infty$ relativ kompakt.

Bemerkungen:

1. Im Fall eines lokal-kompakten Raumes folgt aus $(**)$, daß eine relativ kompakte Teilmenge von $M(X, \tau)$ gleichgradig straff ist. Von Prohorov (siehe [PV], Th.1.12) wurde gezeigt, daß auch im Fall eines polnischen Raumes die relativ kompakten Teilmengen von $M(X, \tau)$ genau die gleichgradig straffen Teilmengen sind. Das gilt ebenso für vollständig

metrisierbare Räume (siehe [VN], Part II, Th.31). Jedoch ist auf dem σ -kompakten, separablen, metrischen Raum $X = \mathbb{Q}$ nicht notwendig jede relativ kompakte Teilmenge von $M(X, \tau)$ gleichgradig straff (siehe [PS], Th.5).

2. Auf einem metrisierbaren Raum gelten im vorhergehenden Satz für $M(X, \sigma)$ die zu a) und b) analogen Aussagen. Dieser Fall ist jedoch im folgenden Beispiel enthalten.

Beispiel D

Schwache Topologie auf dem Raum der Baire-Maße.

Für einen topologischen Raum X bezeichnet $M_0(X, \sigma)$ bzw. $M_0(X, \tau)$ die Gesamtheit der Baire-Maße bzw. der τ -stetigen (siehe Beispiel C in Teil I) Baire-Maße auf X .

SATZ

1. $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{G}_0(X))$ ist die größte Topologie auf $M_0(X, \sigma)$ derart, daß die Abbildung $\mu \mapsto \int_X f d\mu$ für jede stetige, beschränkte Funktion f auf X stetig ist.
2. $(M_0(X, \sigma), \mathcal{F}(F_0(X), \mathcal{G}_0(X)))$ ist ein vollständig regulärer Hausdorff-Raum.
3. $(M_0(X, \sigma), \mathcal{F}(F_0(X), \mathcal{G}_0(X)))$ ist separabel und metrisierbar, falls $\mathcal{G}_0(X)$ eine abzählbare Basis besitzt.
4. Eine Teilmenge M von $M_0(X, \varphi)$ mit $\sup_{\mu \in M} \mu(X) < \infty$ ist genau dann relativ kompakt in $(M_0(X, \varphi), \mathcal{F}(F_0(X), \mathcal{G}_0(X)))$, wenn gilt:

$$\inf_{Z \in \mathcal{O}} \sup_{\mu \in M} \mu(Z) = 0 \quad \text{für } \mathcal{O} \subset \mathcal{F}_0(X) \text{ absteigend gerichtet}$$

mit $|\mathcal{O}| \leq \varphi$ und $\inf \mathcal{O} = \emptyset$.

Beweis:

Es gilt:

- (1) $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{G}_0(X))$ normal (vgl. Teil c) im Beispiel zu Definition 3.20),

$$(2) \quad \mathcal{G}_0(X) \subset (\mathcal{F}_0(X))^{\square} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}_0(X) \subset (\mathcal{G}_0(X))_{\sigma},$$

(3) $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{G}_0(X))$ σ -regulär (vgl. Bemerkung zu Definition 4.23).

Zu 1. und 2.: Wegen (2) ist gemäß Satz 1.19 jedes Baire-Maß $(\mathcal{F}_0(X), \mathcal{G}_0(X))$ -regulär. Wegen (1) folgt daher die erste bzw. zweite Behauptung aus Satz 4.14, a) bzw. Satz 4.19, a).

Zu 3.: Die dritte Behauptung folgt wegen (1) und (2) aus Theorem 5.6.

Zu 4.: Die vierte Behauptung folgt wegen (3) aus Theorem 6.8 (vgl. (a) im ersten Beispiel zu Definition 2.1).

Symbolverzeichnis

A In den Vorbemerkungen definierte Symbole

δ_x	Seite IX	$\phi, \varphi, \varphi-1$	Seite X
$\mathcal{C}^i(x), \mathcal{C}^s(x)$		A_φ, A^φ	XI
$\mathcal{V}(x), \mathcal{K}(x)$		$\varphi(A)$	
$\mathcal{O}(x), \mathcal{F}(x), \mathcal{R}(x)$		$\langle \underline{a}, h, \overline{a} \rangle$	
$\mathcal{O}_0(x), \mathcal{F}_0(x)$		w^x	
$\mathcal{L}(x), \mathcal{L}_0(x)$	X	$\tilde{\mathcal{R}}$	
A^a, A^o		$\mathcal{P}(x)$	XII
$ A $		$B \setminus A$	
ρ, σ, τ		$\mathcal{C}A$	

B In der Arbeit definierte Symbole

W, V, A^i, A^s	Seite 1	I_v	Seite 57
$0, 1$		$\mathcal{C}^i(A^i, A^s), \mathcal{C}^s(A^i, A^s)$	58
v_x, v^x	7	$\mathcal{C}(A^i, A^s)$	
$A \wedge c, A \vee c$	9	$\mathcal{C}_0^i(A^i, A^s), \mathcal{C}_0^s(A^i, A^s)$	60
A_E^i, A_E^s	16	$\mathcal{C}_0(A^i, A^s)$	
$\mathcal{L}_{A^i, \varphi}^i, \mathcal{G}_{A^s, \varphi}^s$	24	$\mathcal{C}_0^i, \mathcal{C}_0^s, \mathcal{C}_0$	
$\underline{v}, \overline{v}, \underline{v}, \overline{v}$	26	$\mathcal{R}(A^i, A^s)$	69
$\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}, A^i, \tilde{A}^s$	29	$\mathcal{H}(\mathcal{C}_0(A^i, A^s))$	
$\mathcal{A}_E^i, \tilde{\mathcal{A}}_E^s$		$\mathcal{W}_\rho^0(V)$	77
γ	51	$\mathcal{W}_\phi^0(V; A^i, A^s)$	
$\mathcal{F}(W)$		$\mathcal{W}_\phi^0(V; A), \mathcal{W}_\phi^0(V)$	
$\underline{h}, \overline{h}$	52	$\mathcal{H}(A^i, A^s), \mathcal{H}(A)$	
$\mathcal{L}(V), \mathcal{L}_0(V)$	53	$\mathcal{H}(A^i, A^s)$	81
h_{α_1, α_2}	55	$A_{\mathcal{W}}^i, A_{\mathcal{W}}^s$	86
		d_h, d_h'	95

Stichwortverzeichnis

A		Isomorphismus	X
additiv	Seite 6	isoton	X
affin	55/69	$\mathcal{F}$	
antiton	X	Kapazität	5
(A^i, A^S) - φ -stetig	3	$\mathcal{M}$	
A - φ -stetig	3	Maß	IX
(A^i, A^S) -regulär	13	monotone Hülle	XI
B		monotones System	XI
Baire-Maß	X	N	
bedingt φ -vollständig	X	nach unten (oben)	
Borel-Maß	X	φ -geschlossen	XI
D		normal	63
dual	2	O	
C		oberadditiv	6
gleichgradig schwach		Ortsfunktion	51
(A^i, A^S) - φ -stetig	103	P	
gleichgradig schwach		φ -distributiv	XI
φ -stetig	104	φ -Morphismus	X
gleichgradig straff	122	φ -regulär	89
H		φ -stetig	3
Halbintegral	27	φ -System	XI
halbstetig bzgl. (A^i, A^S)	58	φ -Verband	XI
I			
Inhalt	IX		

R

ρ -Bewertung 8

Radon-Maß 46

S

σ -Bewertung 8

schwach (A^i, A^s) - φ -stetig 16

schwach φ -stetig 17

schwache Topologie 77

stetig bzgl. (A^i, A^s) 58

straffer Inhalt 46

streng normal 64

T

trennend 83

U

unteradditiv 6

V

Vage Topologie 118

V-meßbare Ortsfunktionen 53

v-randlos 91

Literaturverzeichnis

- [AF] Alexandroff, A.D.: Additive set functions in abstract spaces. Mat. Sb. 8 (1940), 307-348, 9 (1941), 563-628, 13 (1943), 169-238.
- [AN] Alfsen, E.M.: Order theoretic foundations of integration. Math. Ann. 149 (1963), 419-461.
- [BR] Bauer, H.: Eine Riesz'sche Bandzerlegung im Raum der Bewertungen eines Verbandes. S.-Ber. mat. naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. MÜ 53, 89-117.
- [BF] Birkhoff, G.: Lattice theory, Third edition, Am. Math. Soc. Coll. Publ. XXV, New York 1967.
- [CY] Carathéodory, C.: Maß und Integral und ihre Algebraisierung. Birkhäuser Verlag, Basel 1956.
- [CT1] Choquet, G.: Theory of capacities. Ann. Inst. Fourier 5, (1953-54), 131-292.
- [CT2] Choquet, G.: Forme abstraite du théorème de capacabilité. Ann. Inst. Fourier 9 (1959), 83-89.
- [DL] Daniell, P.F.: A general form of integral. Ann. Math. 19 (1917-18), 279-294.
- [FA] Funayama, N.: Imbedding infinitely distributive lattices completely isomorphically into Boolean algebras. Nagoya Math. J. 15 (1959), 71-81.
- [HS] Halmos, P.R.: Measure theory. D. van Nostrand, New York 1950.
- [KY] Kelley, J.L.: General topology. D. van Nostrand, New York 1955.

- [KI] Kisyński, J.: On the generation of tight measures.
Studia Math. 30 (1968), 141-151.
- [MR] Meyer, P.-A.: Probabilités et potentiel. Hermann,
Paris 1966.
- [PS] Preis, D.: Metrik spaces in which Prohorov's theorem is
not valid. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.
27 (1973), 109-116.
- [PV] Prohorov, Yu.V.: Convergence of random processes and
limit theorems in probability theory. Theor. Probab-
ility Appl. 1 (1956), 157-214.
- [RL] Ressel, P.: Some continuity and measurability results on
spaces of measures. Preprint Series 1976 No 12.
- [SI] Sikorski, R.: Boolean algebras. Springer-Verlag, Berlin
1969.
- [S/S] Steen, L.A./Seebach, J.A.: Counterexamples in topology.
Holt, Rinehard and Winston, Inc., 1970.
- [TE1] Topsøe, F.: Compactness in spaces of measures. Studia
Math. 36 (1970), 195-212.
- [TE2] Topsøe, F.: Topology and measure. Springer-Verlag,
Berlin 1970.
- [VN] Varadarajan, V.S.: Measures on topological spaces. Mat.
Sb. (N.S.) 55(97) (1961), 35-100 (= Amer. Math. Soc.
Transl. 48(ser.2) (1965), 161-228).

Lebenslauf

Geburtsdatum: Am 5. 1. 1950 wurde ich

Geburtsort: in Morbach, Kreis Bernkastel, geboren.

Schulbildung: Nach vierjähriger Volksschulzeit in
Walsum besuchte ich das altsprachliche
Gymnasium Collegium Augustinianum
Gaesdonck bei Goch und bestand dort
im Frühjahr 1968 das Abitur.

Studium: Im Wintersemester 1968/69 begann ich
an der Ruhr-Universität Bochum mein
Mathematikstudium mit dem Nebenfach
Physik. Ich hörte insbesondere Vorle-
sungen der Herren Professoren Gänßler,
Kellerer und Reiffen.

Abschlußprüfung: Die Hauptdiplomprüfung legte ich im
Mai 1973 ab.

Berufliche Tätigkeit: Seit 1973 verwalte ich eine wissen-
schaftliche Assistentenstelle am
mathematischen Institut der Ludwig-
Maximilians-Universität München.

